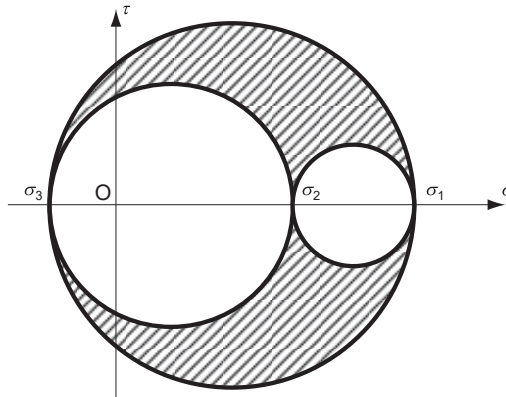


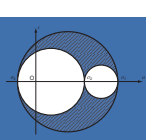
# Mécanique des structures



## Chapitre 0: Introduction

Prof. Shea & Dr. Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**



## Problème 0.1

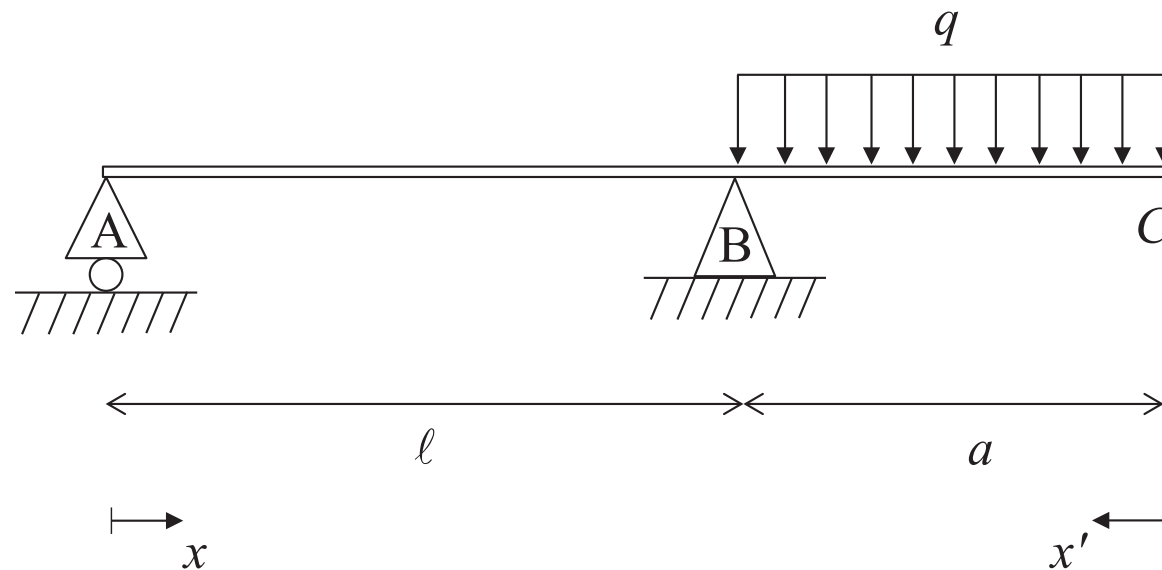
Calculer les réactions aux appuis de la poutre schématisée ci-contre, puis dessiner les diagrammes  $T$  et  $M$  des efforts intérieurs.

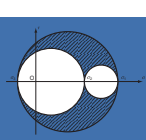
Application :

$$a = 1 \text{ m}$$

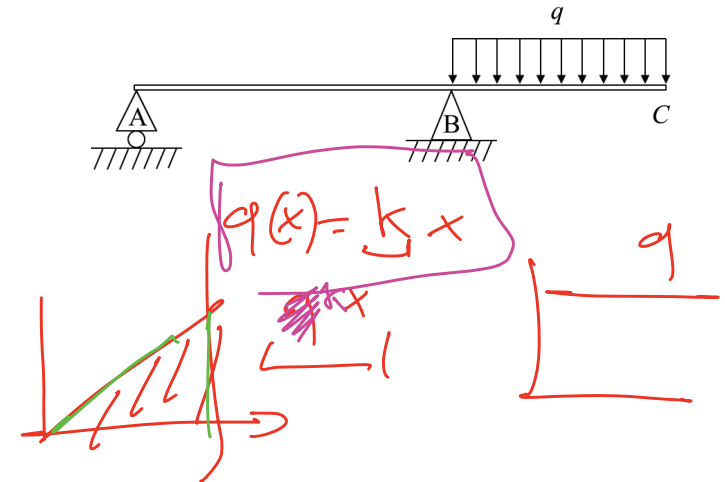
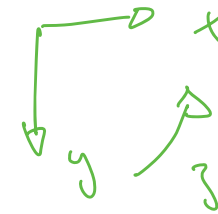
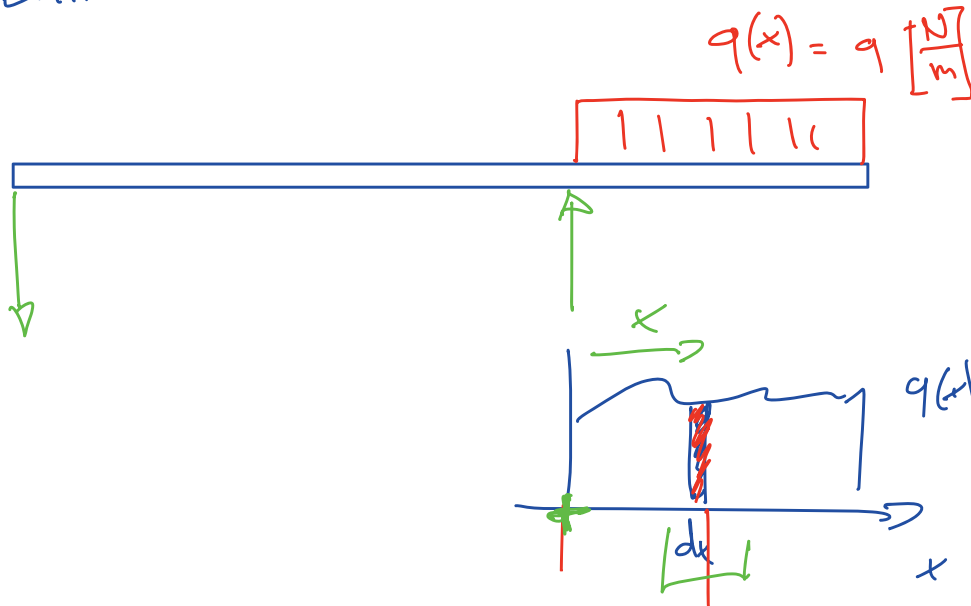
$$\ell = 2 \text{ m}$$

$$q = 5 \text{ kN / m}$$





SCHEMA



$$q(x) = kx$$

$$k = \frac{q(x)}{x} = \frac{N}{m^2}$$

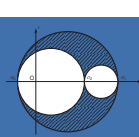
$$F = \int_0^x q(x) dx = qx$$

$$F = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} x^2 k$$

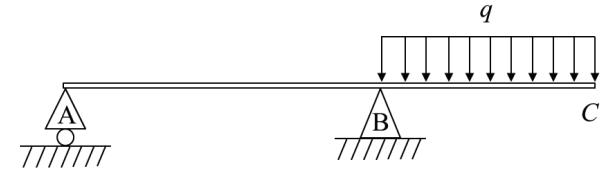
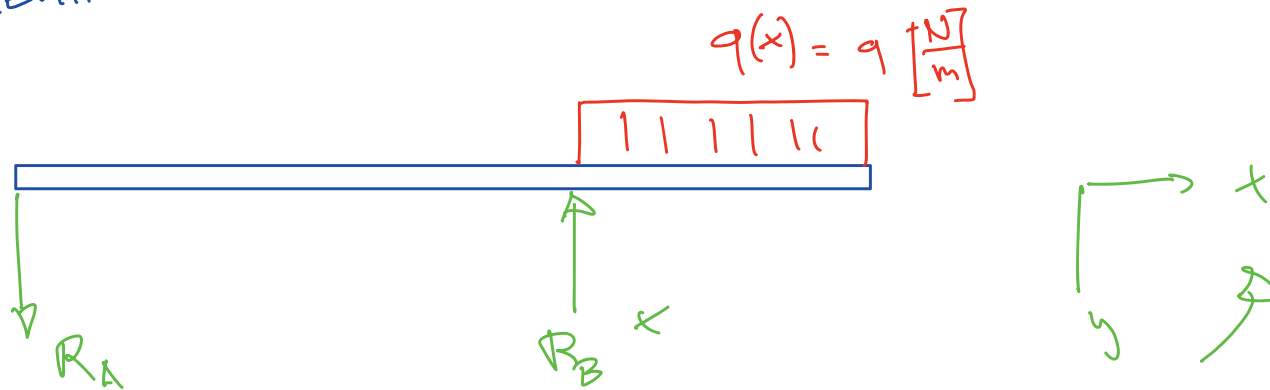
$$M = \int_0^x q(x) x dx$$

$$M = \int_0^x kx^2 dx = \frac{1}{3} kx^3$$

$$\frac{N}{m^2} m^3 = [Nm]$$



SCHEMA

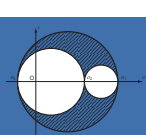


EQU. EQUILIBRE FORCE ET MOMENT

$$\sum F_v = R_A + \int_0^a q \, dx - R_B = 0 \Rightarrow R_B = qa + R_A = \underline{\underline{6250 \text{ N}}}$$

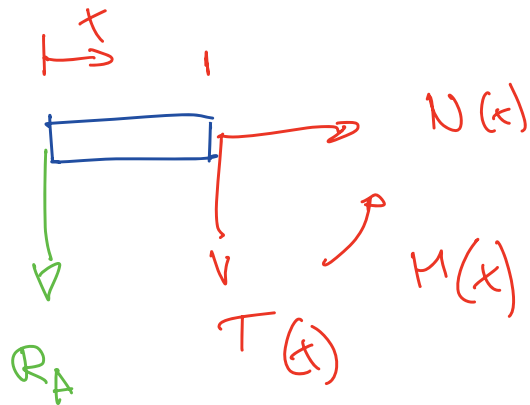
$$\sum M_B = R_A a - \int_0^a qx \, dx = 0 \Rightarrow R_A = \frac{qa^2}{2a} = \underline{\underline{1250 \text{ N}}}$$

$\frac{1}{2}qa^2$



## Problème 0.1

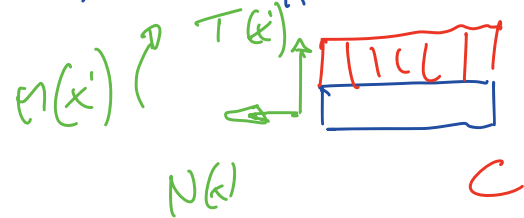
EFFORTS INTERIEURS TRONÇON AB



$$N(x) = 0$$

$$T(x) = -R_A = -1250$$

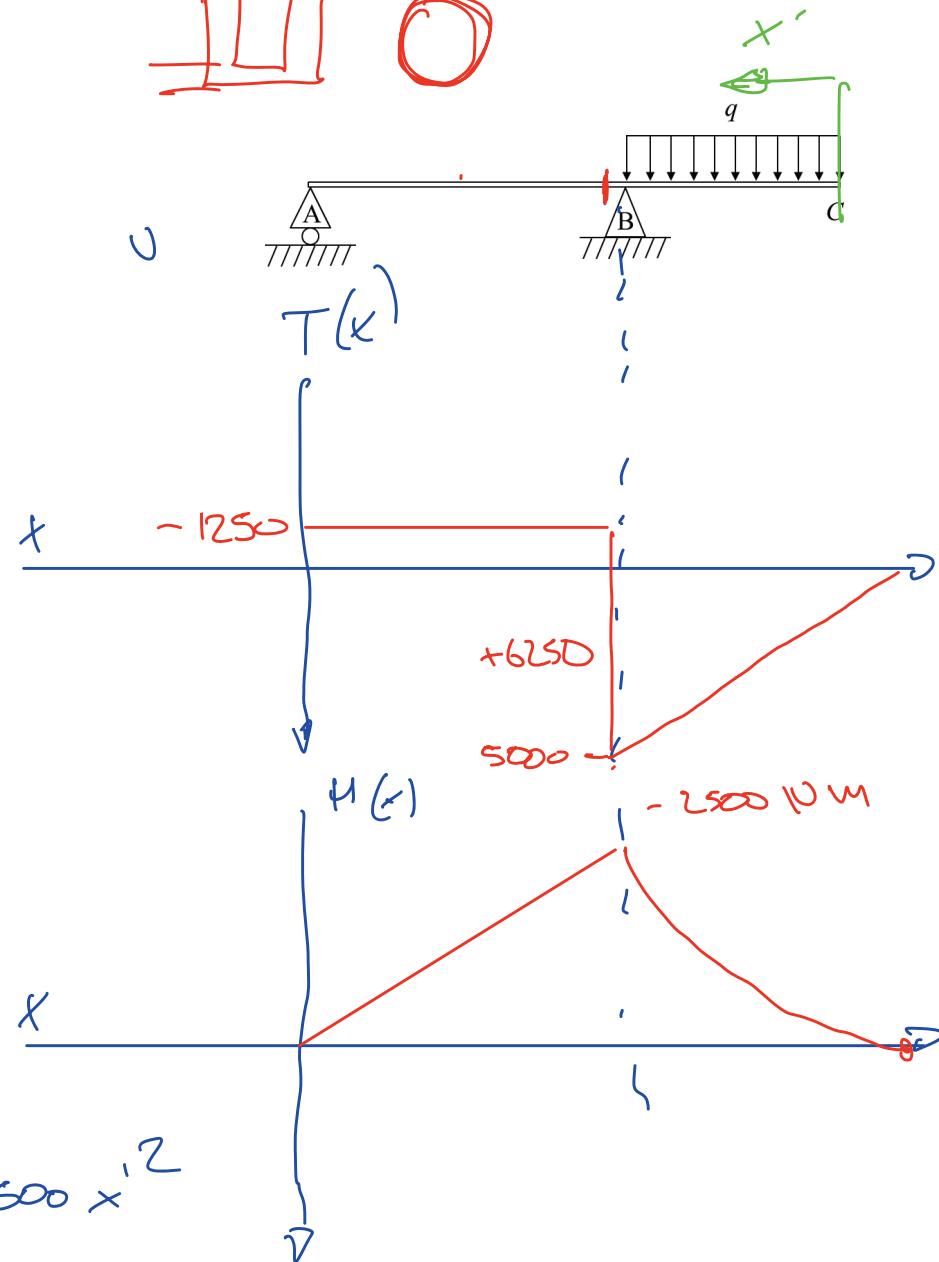
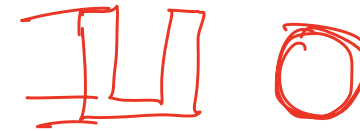
$$M(x) = -R_A x = -1250 x$$



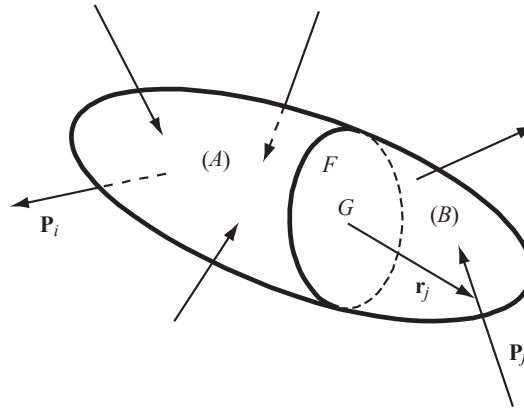
$$N(x') = 0$$

$$T(x') = q x' = 0$$

$$M(x') = -\frac{1}{2} q x'^2 = -2500 x'^2$$



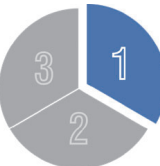
# Mécanique des structures

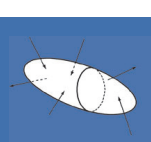


## Chapitre 1: Equilibre intérieur d'un solide

Pr. Shea & Dr Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**



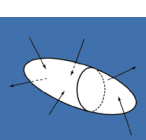


# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Efforts intérieurs et contraintes

Définition des cas particuliers d'**efforts intérieurs** : projection du tenseur des efforts sur les axes principaux définis sur le corps (trièdre de référence à droite, inverse pour le corps  $B$ )

- $N = \iint_F \sigma \, dF$   $N > 0$  représente l'effort de traction simple ou  $N < 0$  de compression,  $\sigma$  est la contrainte normale associée
- $T_y = \iint_F \tau_y \, dF$   
 $T_z = \iint_F \tau_z \, dF$   $T$  est l'effort tranchant et  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$  contrainte tangentielle selon les axes  $y$  et  $z$  sur la face de normale  $x$
- $M_t = - \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$   $M_t$  est le moment de torsion
- $M_{fy} = - \iint_F \sigma z \, dF$   
 $M_{fz} = \iint_F \sigma y \, dF$   $M_{fy}$  et  $M_{fz}$  sont les moments de flexion pure  
(Lorsque le tenseur se réduit à un moment de flexion et à un effort tranchant, on parle de flexion simple)



# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

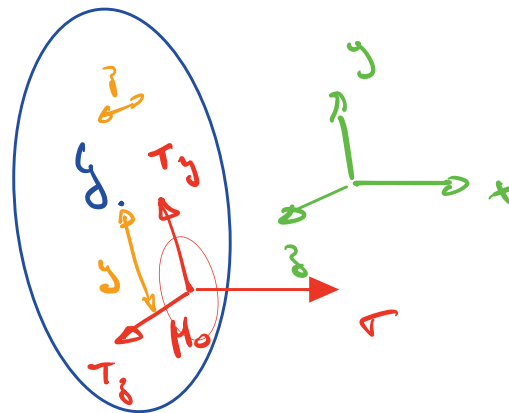
Efforts intérieurs et contraintes

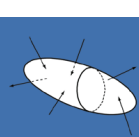
EFFORTS INTERIEURS (FORCES)

$$N = \iint_F P(\text{NORMAL}) dF = \iint_F \tau dF$$

$$T_y = \iint_F P(\text{TRANSVERSE, DIRECTION } y) dF = \iint_F T_y dF$$

$$T_z = \iint_F T_z dF$$





# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Efforts intérieurs et contraintes

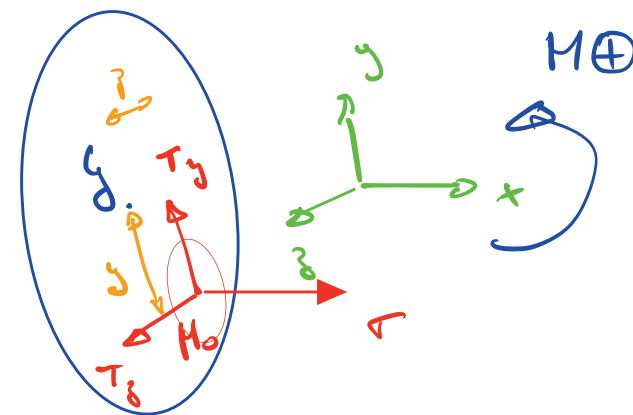
EFFORTS INTERIEURS (MOMENTS)

$$M = \iint r \wedge \sigma \, dF = \iint \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} \, dF$$

$$M_T = \iint \tau_{zy} - \tau_{yz} \, dF$$

$$M_{fy} = \iint \tau_{xz} - \cancel{0} \, dF$$

$$M_{fz} = \iint -\tau_{xy}$$



⚠ SYSTEME DE REF.  
DROITE

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Moment du premier ordre : surface rectangulaire

Intégration du moment statique par rapport à l'axe  $x$

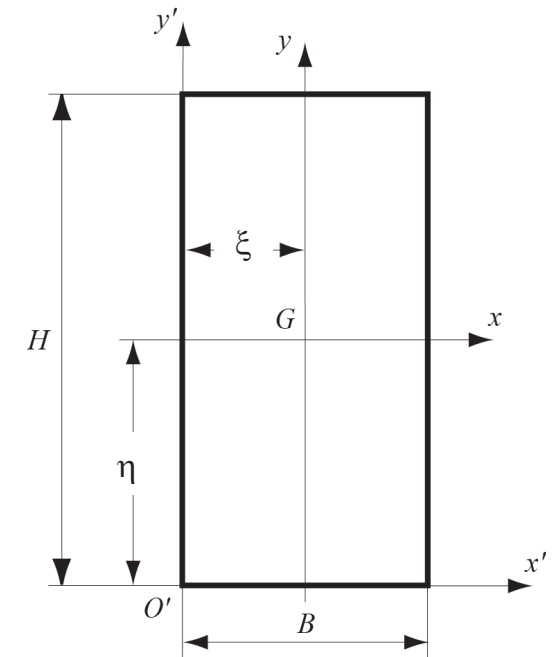
- $$S_x = \iint_F y \, dF = \int_{y=-H/2}^{H/2} \int_{x=-B/2}^{B/2} y \, dx dy = 0$$

Intégration du moment statique par rapport à l'axe  $x'$

- $$S_{x'} = \iint_F y \, dF = \int_{y=0}^H \int_{x'=-B/2}^{B/2} y \, dx dy = \frac{BH^2}{2}$$

Position du centre de gravité par rapport  $x'$

- $$\eta = \frac{\iint_F y \, dF}{\iint_F dF} = \frac{S_{x'}}{F} = \frac{H}{2}$$



Approche discrète : le premier moment de l'aire est la somme des aires multipliée par la distance de l'axe

- $$S_{x'} = \sum y F = \frac{H}{2} B H = \frac{BH^2}{2}$$

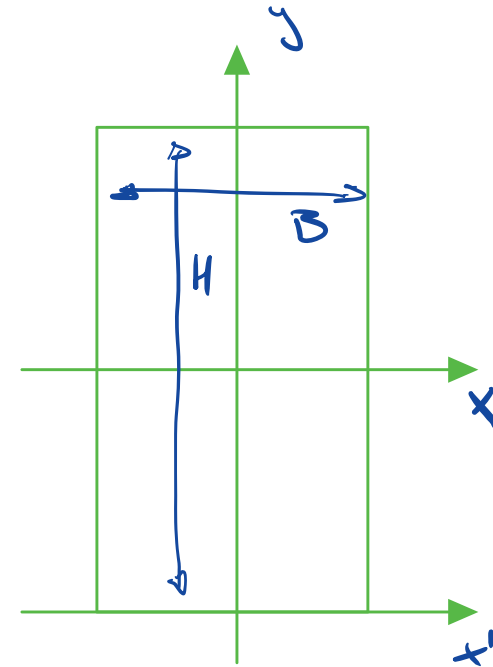


# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Moment du premier ordre : surface rectangulaire

MOMENT STATIQUE AXE X

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_F y \, dF = \int_{y=-H/2}^{H/2} \int_{x=-B/2}^{B/2} y \, dx \, dy \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} y^2 \Big|_{-H/2}^{H/2}}_0 \times \int_{-B/2}^{B/2} dx = 0 \end{aligned}$$



MOMENT STATIQUE AXE x'

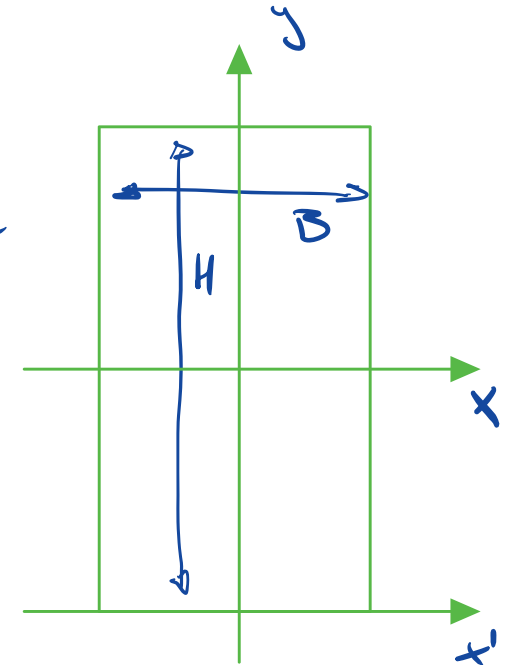
$$\begin{aligned} S_{x'} &= \int_{y=0}^H \int_{x=-B/2}^{B/2} y \, dx \, dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^H \times \int_{-B/2}^{B/2} dx = \frac{1}{2} H^2 \left( \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \right) \\ &= \frac{BH^2}{2} \end{aligned}$$

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Moment du premier ordre : surface rectangulaire

POSITION CENTRE DE GRAVITÉ

$$y = \frac{\iint y \, dF}{\iint dF} = \frac{S_{x'}}{F} = \frac{BH^2}{2BH} = \frac{H}{2}$$



CALCUL DISCRET MOMENT STATIQUE

$$S_{x'} = \sum y F = \frac{H}{2} BH = \frac{BH^2}{2}$$

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Centre de gravité et moment statique

- $$S_x = \sum y F = \frac{h}{2} bh + (h + (H - h)/2) (H - h)B$$

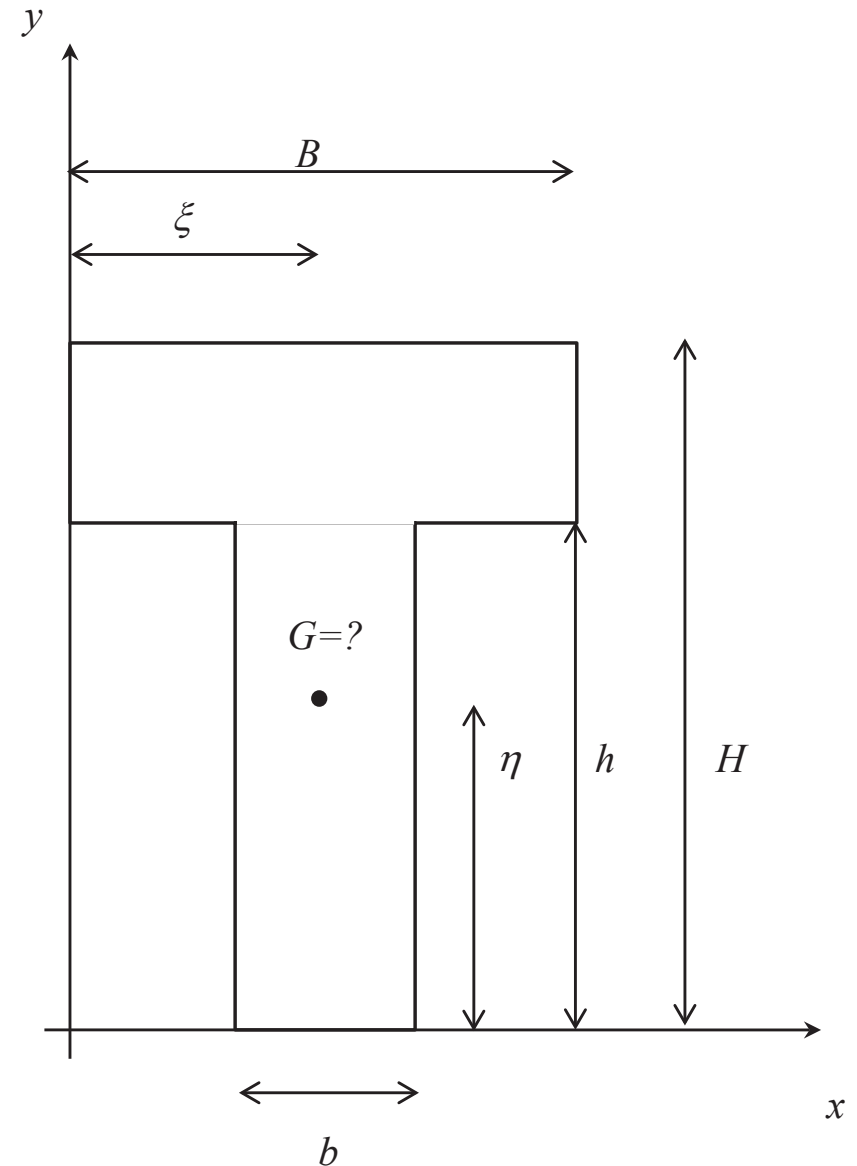
$$= \frac{h^2 b}{2} - \frac{h^2 B}{2} + \frac{H^2 B}{2} = \frac{H^2 B - h^2 (B - b)}{2}$$

- $$F = BH - h(B - b)$$

- $$\eta = \frac{S_x}{F}$$

- $$S_y = \sum x F = \frac{B^2 H - hB(B - b)}{2}$$

- $$\xi = \frac{S_y}{F} = \frac{B^2 H - hB(B - b)}{2BH - h(B - b)} = \frac{B}{2}$$



NOTE

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Centre de gravité et moment statique

APPROCHE DISCRETE

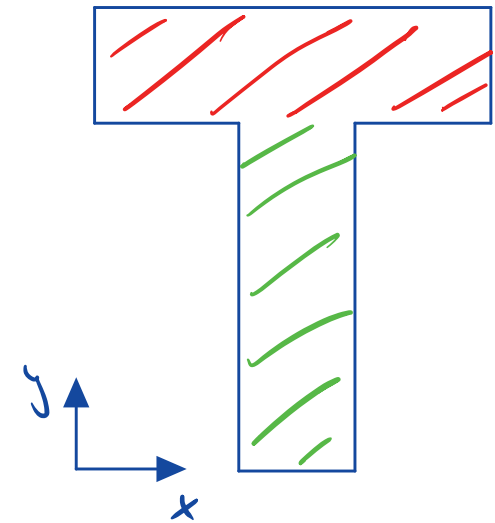
$$S_x = \sum y F = \frac{h}{2} b h + \left( h + \frac{H-h}{2} \right) (H-h) B$$
$$= \frac{h^2 b}{2} - \frac{h^2 B}{2} + \frac{H^2 B}{2} = \frac{H^2 B - h^2 (B-b)}{2}$$

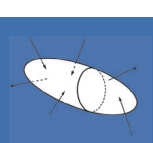
$$F = BH - h(B-b)$$

$$y = S_x / F$$

$$S_y = \sum x F = \frac{B^2 H - h B (B-b)}{2}$$

$$\xi = \frac{S_y}{F} = \frac{B^2 H - h B (B-b)}{2 (BH - h B (B-b))} = \frac{B}{2}$$



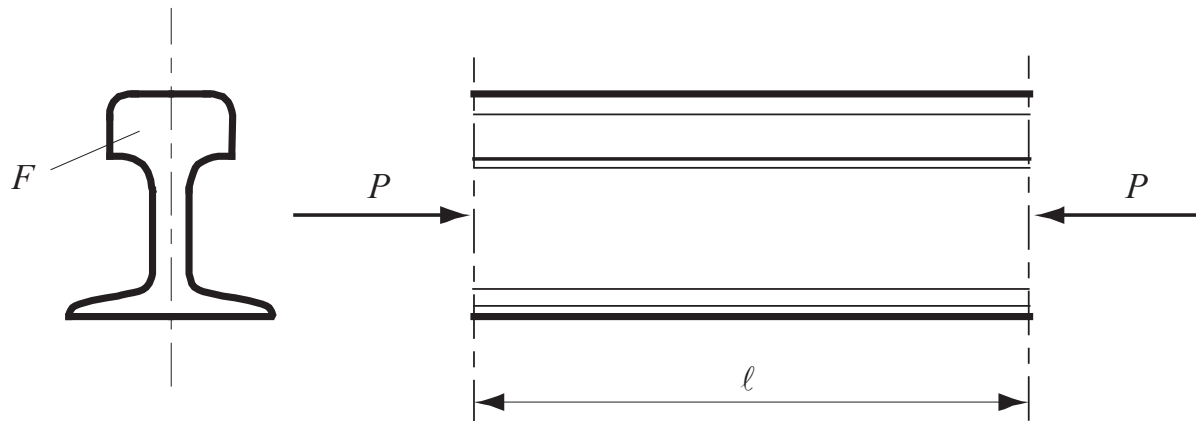


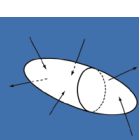
# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Problème 1.1

Calculer la contrainte et la force dans un long rail soudé soumis à un écart de température de  $\Delta\theta = \pm 50\text{ }^\circ\text{C}$

Section  $F = 75\text{ cm}^2$   
Module  $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa} = 210\text{ GPa}$   
Coeff. therm.  $\alpha = 12 \times 10^{-6}\text{ }/^\circ\text{C}$





# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Problème 1.1

1) DILATATION THERMIQUE

$$\rightarrow \Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T = l \cdot \alpha \cdot (T - T_0)$$

2) PRECONTRAINTE MECANIQUE

$$\sigma = \frac{P}{F} = \epsilon E = \frac{\Delta l}{l} E$$

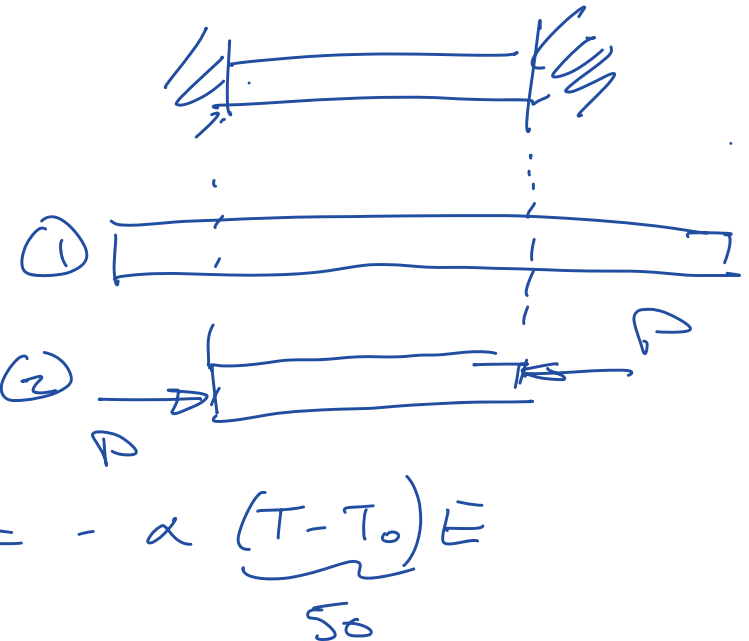
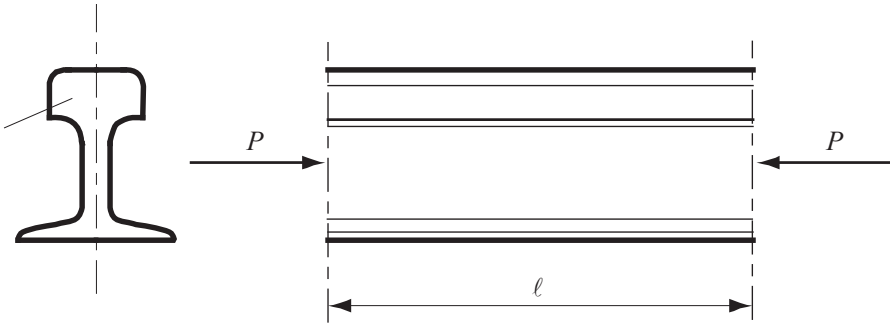
3) SUPERPOSITION DES CAS CHARGES

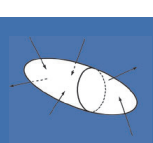
$$\rightarrow \Delta P_{\text{therm.}} + \Delta P_{\text{méca}} = 0$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{\Delta P}{F} E = - \frac{l \alpha (T - T_0)}{l} E = - \alpha (T - T_0) E$$

$$\sigma (\Delta T = +50^\circ\text{C}) = \underline{\underline{-126 \text{ MPa}}}$$

$$P = \sigma F = \underline{\underline{-945 \text{ kN}}}$$

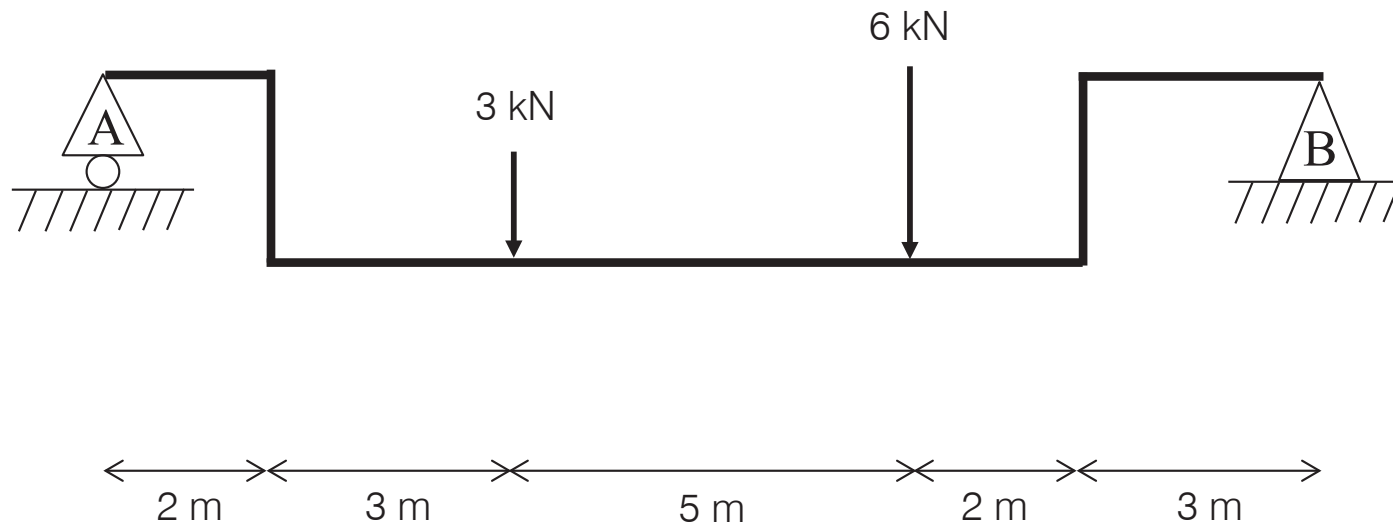




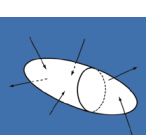
# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Problème 1.2

Calculer les réactions  $R_A$  et  $R_B$  pour le système ci-dessous, puis représenter les diagrammes des efforts intérieurs  $N$  (effort normal),  $T$  (effort tranchant), et  $M$  (moment fléchissant), en indiquant les valeurs particulières.



NOTE



# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Problème 1.2

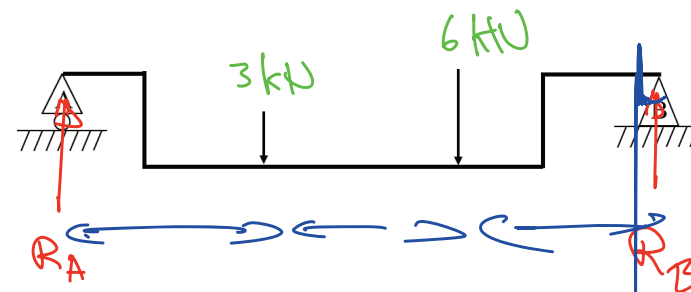
### 1) EQUILIBRE DES MOMENTS

$$\sum M_A : 3 \text{ kN} \times 5 \text{ m} + 6 \text{ kN} \times 10 \text{ m} - R_B \times 15 \text{ m}$$

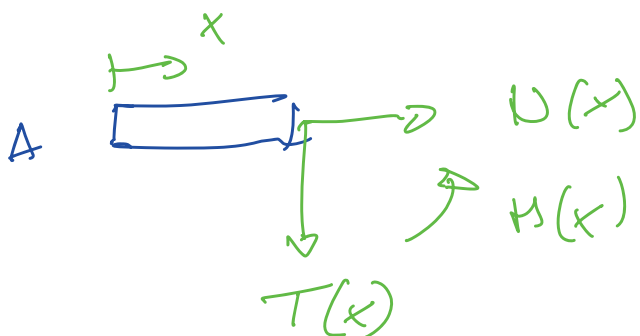
$$\rightarrow R_B = \frac{75}{15} = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_B : 6 \times 5 + 3 \times 10 - R_A \times 15$$

$$\rightarrow R_A = \frac{60}{15} = 4 \text{ kN}$$



### 2) EFFORTS INTERIEURS



# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Problème 1.2

7) EF

$$P(x) = 0$$

$$T(x) = R_A - 5 - 6 = -5 \text{ kN}$$

$$M(x) = R_A x - 3(x-5) - 6(x-10)$$

8) FG

$$P(x) = R_A + 3 + 6 = 5 \text{ kN}$$

$$T(x) = 0$$

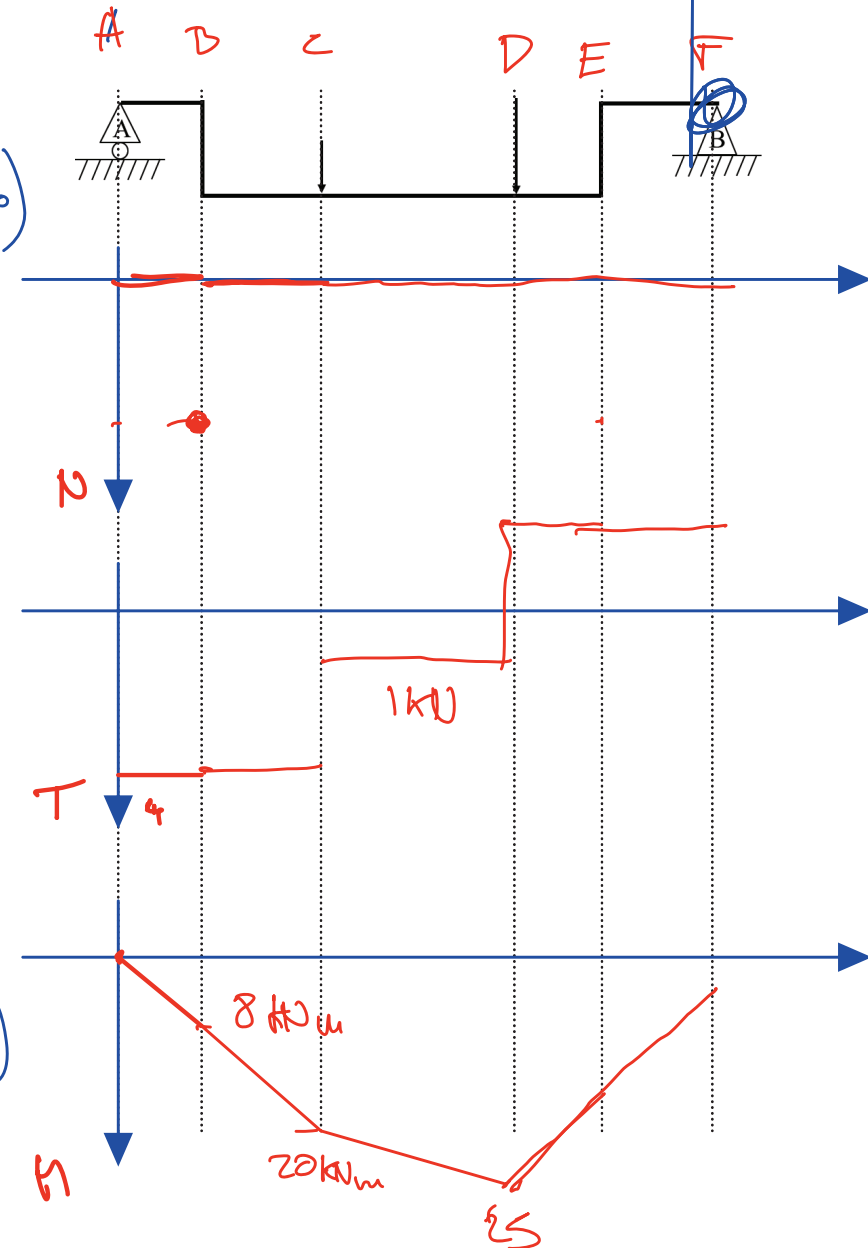
$$M(x) = 3R_B$$

9)

$$P(x) = 0$$

$$T(x) = -R_B = 5 \text{ kN}$$

$$M(x) = R_A x - 3(x-5) - 6(x-10)$$



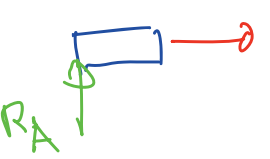
# Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

## Problème 1.2

3) AB  $N(x) = 0$

$T(x) = R_A = 4 \text{ kN}$

$M(x) = R_A x = 4x$

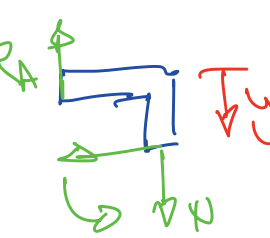


4) BC

$N(y) = R_A$

$T(y) = 0$

$M(y) = 2R_A = 8 \text{ kNm}$

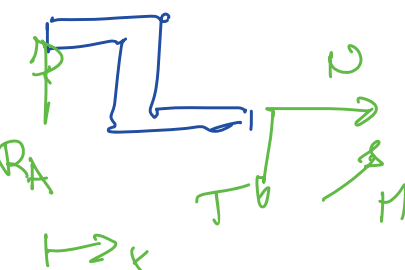


5) CD =

$N(x) = 0$

$T(x) = R_A = 4 \text{ kN}$

$M(x) = R_A x$

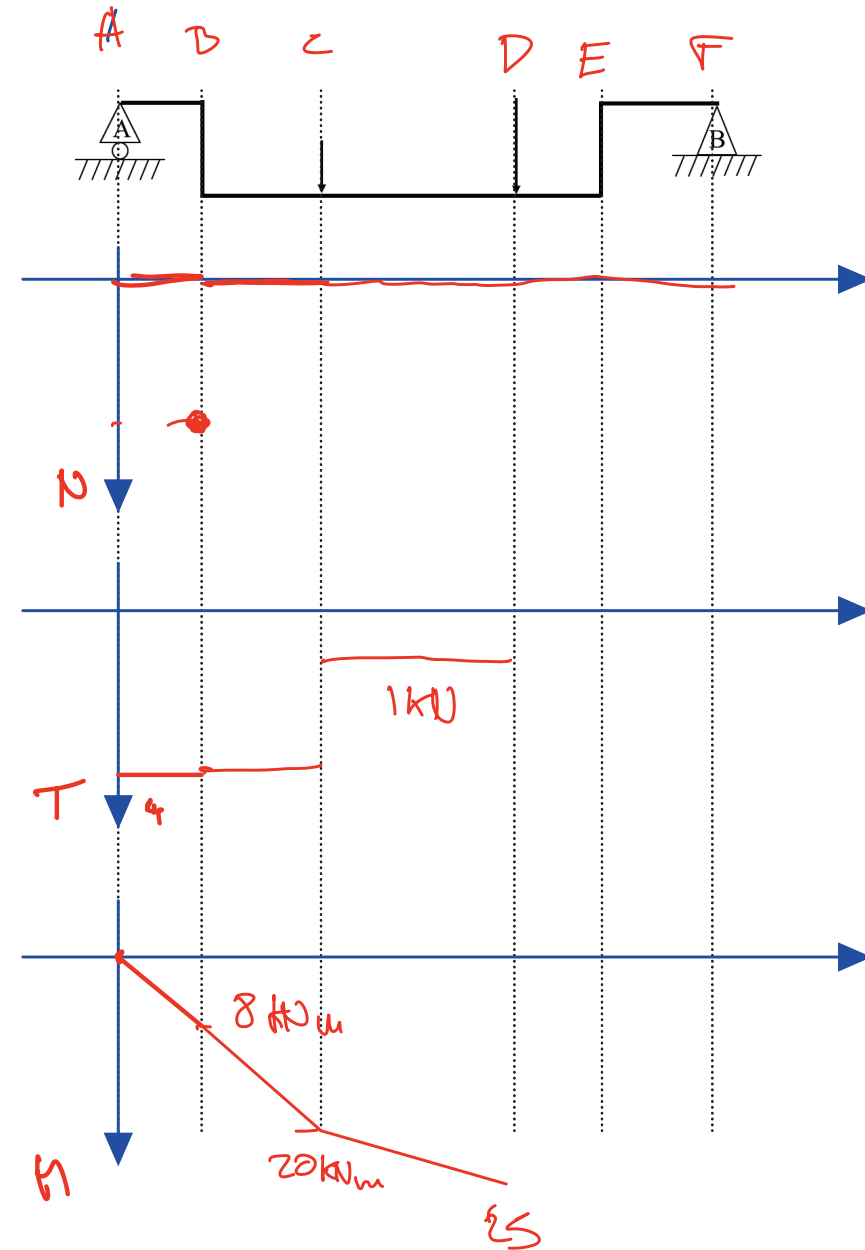


6) DE

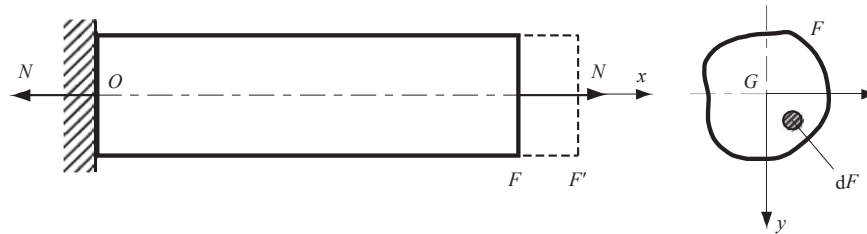
$N(x) = 0$

$T(x) = R_A - 3 = 1 \text{ kN}$

$M(x) = R_A x - 3(x - 5)$



# Mécanique des structures



## Chapitre 2: Traction ou compression simple

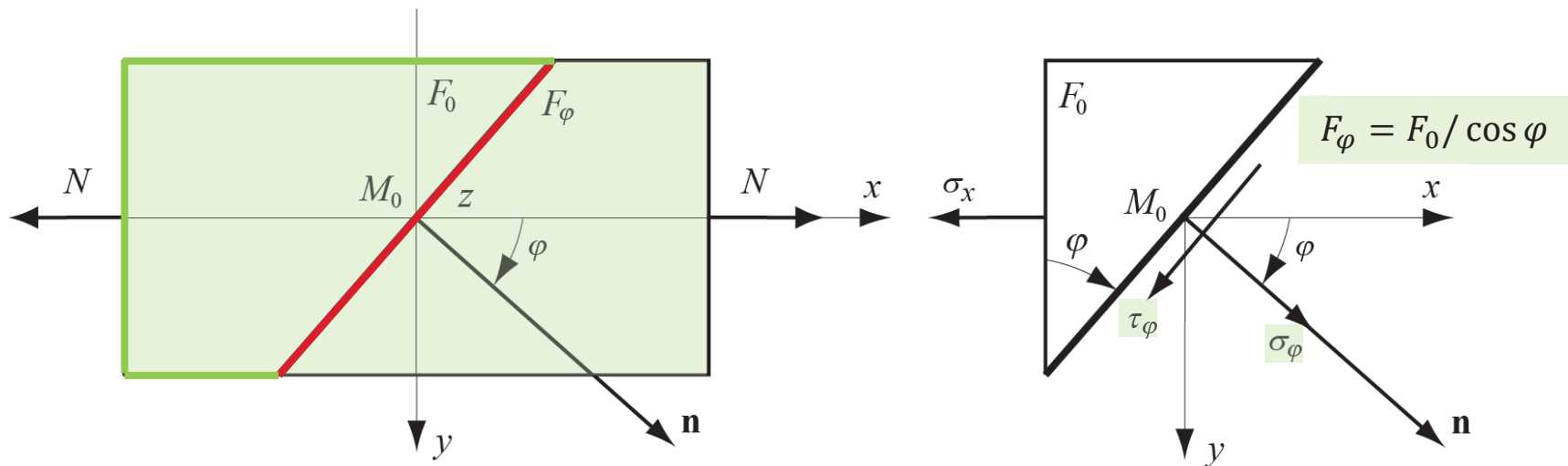
Pr. Shea & Dr Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**

# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

En particulier, les plans  $M_0xy$  et  $M_0xz$  sont principaux et  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . Considérons une section oblique  $F_j$ , perpendiculaire au plan principal  $M_0xy$  et tournant autour de l'axe  $M_0z$ . Sa normale  $\mathbf{n}$  fait un angle  $\varphi$  avec l'axe  $M_0x$ .



Soient  $\sigma_\varphi$  et  $\tau_\varphi$  les contraintes normales et tangentielles au point  $M_0$  de cette section. Comme les forces agissant sur les faces  $F_0$  et  $F_\varphi$  passent toutes par  $M_0$ , le moment résultant est nul. Les équilibres des forces dans les directions  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}_\perp$  s'expriment :

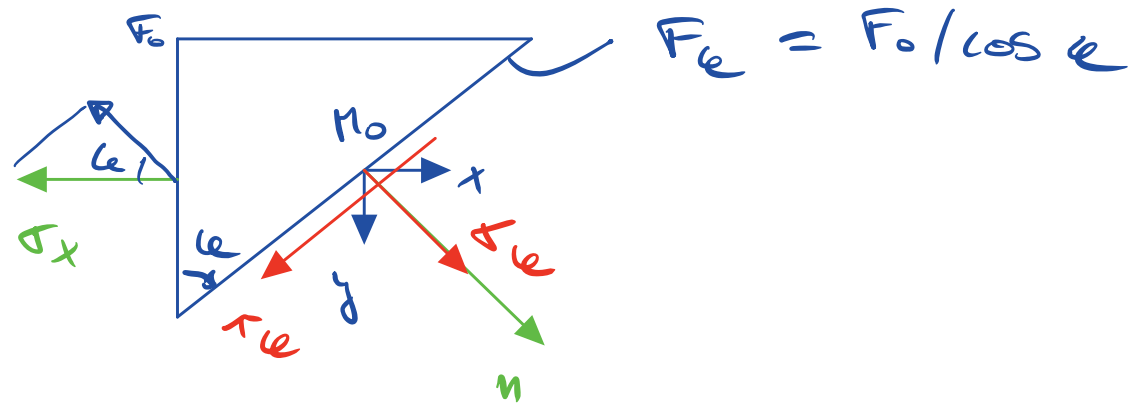
- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_0 \sigma_x \cos \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi - F_0 \sigma_x \sin \varphi = 0$

- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\varphi)$
- $\tau_\varphi = -\sigma_x \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$



# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple



$$\sum F_{nT} = F_\alpha \tau_\alpha + F_0 \tau_x \sin \alpha = 0$$

$$= F_0 \tau_\alpha / \cos \alpha + F_0 \tau_x \sin \alpha = 0$$

$$\rightarrow \tau_\alpha = -\tau_x \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -\frac{\tau_x}{2} \sin 2\alpha$$

# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

On reconnaît les équations paramétriques d'un cercle, appelé *cercle de Mohr*, centré au point  $(\sigma_x/2, 0)$  et de rayon  $\sigma_x/2$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

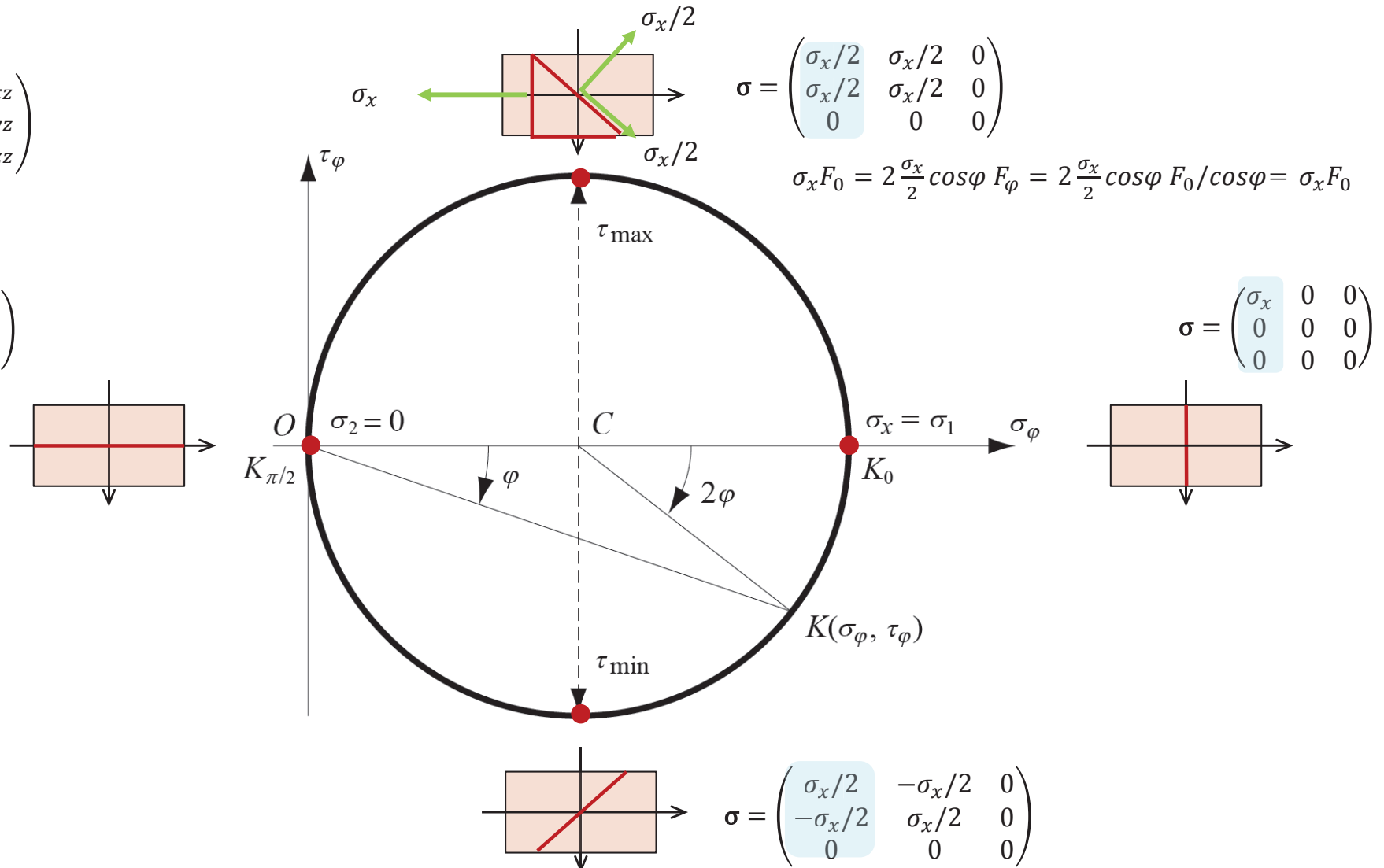
$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ \sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x F_0 = 2 \frac{\sigma_x}{2} \cos \varphi F_\varphi = 2 \frac{\sigma_x}{2} \cos \varphi F_0 / \cos \varphi = \sigma_x F_0$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x/2 & -\sigma_x/2 & 0 \\ -\sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

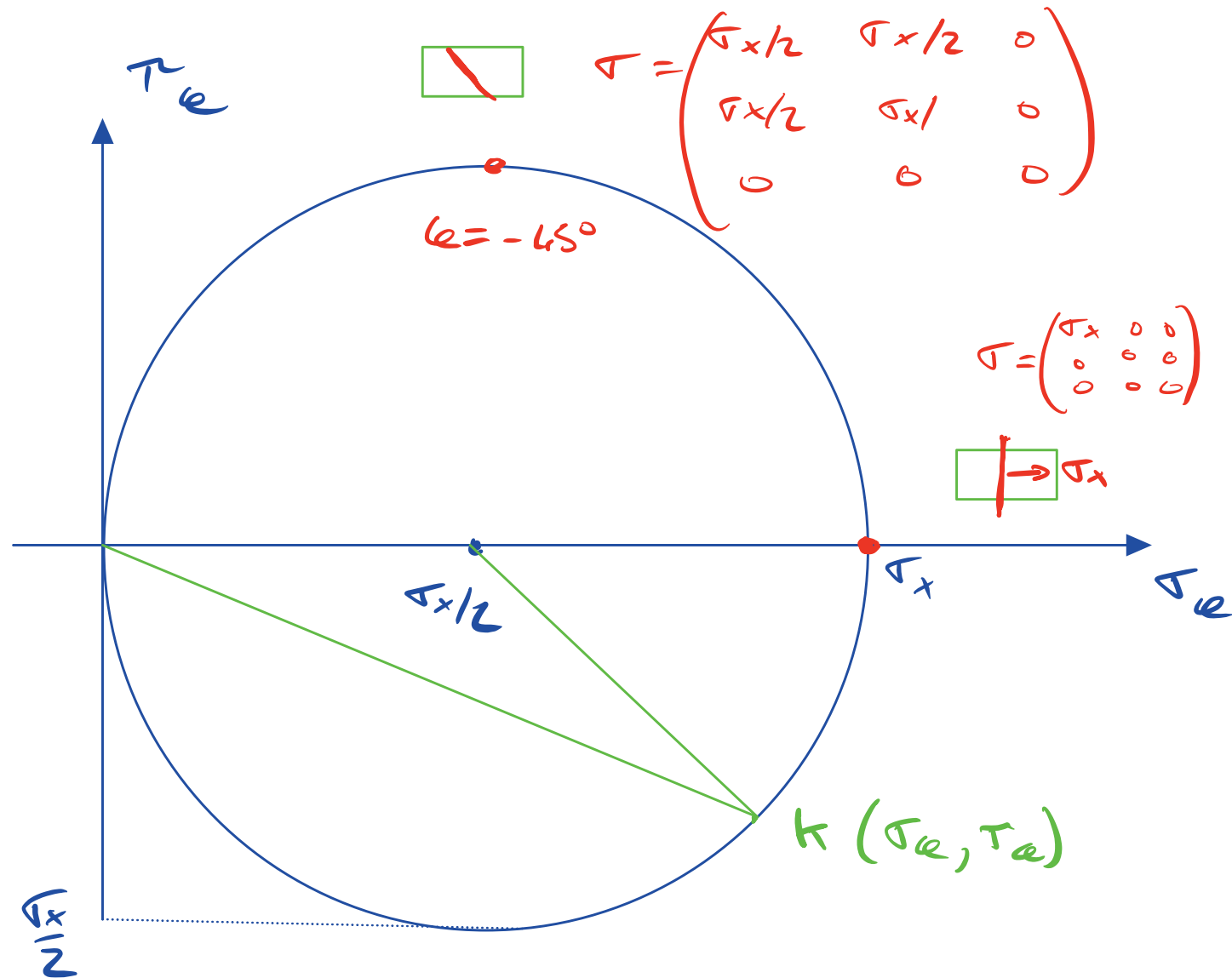


NOTE

# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

$$\begin{cases} \sigma_k = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \tau_k = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$



# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Énergie de déformation

Dans le domaine élastique, l'*énergie de déformation* est rendue par le solide quand la force extérieure revient à sa valeur initiale. (suffisamment lentement pour que les effets dynamiques internes soient négligeables)

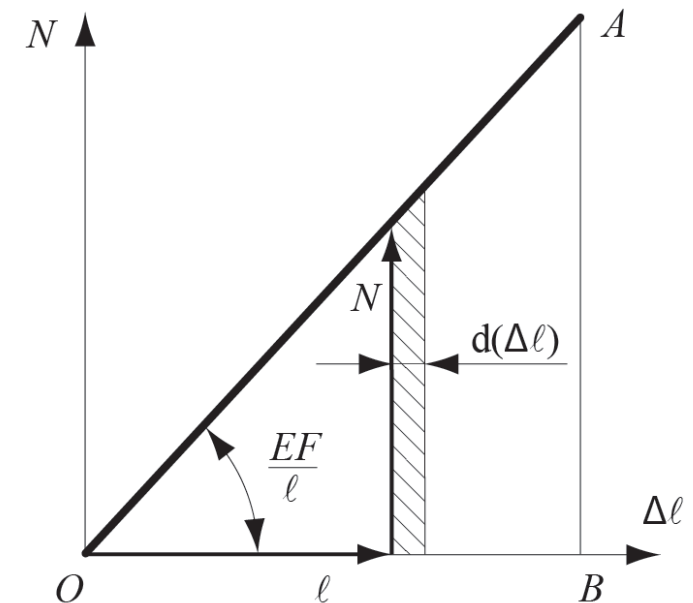
L'énergie élastique pour le barreau entier a pour valeur :

$$\bullet \quad U = \int_0^{\Delta\ell} dU = \int_0^{\Delta\ell} N d(\Delta\ell) = \frac{EF}{\ell} \int_0^{\Delta\ell} \Delta\ell d(\Delta\ell) = \frac{EF(\Delta\ell)^2}{2\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell} EF \frac{\Delta\ell}{2} = N \frac{\Delta\ell}{2} = \frac{N^2 \ell}{2EF}$$

$dU = N d(\Delta\ell)$                        $N = \frac{\Delta\ell EF}{\ell}$

Un calcul identique au précédent permet de trouver les trois formes suivantes de la densité d'énergie :

$$\bullet \quad u = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon \sigma}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$



# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Énergie de déformation

ENERGIE ELASTIQUE BARREAU

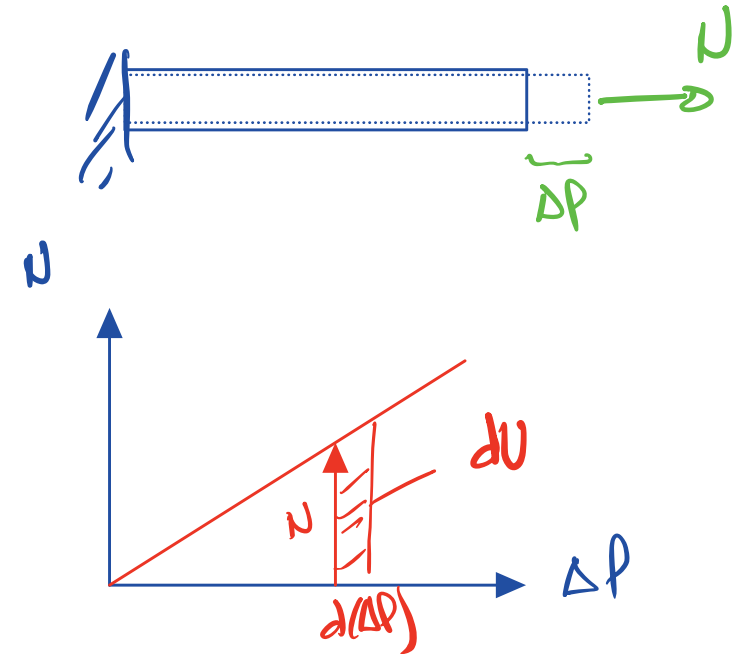
$$E_{pot} = \underbrace{m \cdot g}_{F_p} \cdot h$$

$$U = \int_0^{\Delta p} dU = \int_0^{\Delta p} N d(\Delta p)$$

$$= \int_0^{\Delta p} \frac{\Delta p EF}{P} d(\Delta p) = \frac{EF \Delta p^2}{2P}$$

$$= \underbrace{\frac{\Delta p}{P} EF}_{\sigma F = N} \frac{\Delta p}{2} = N \frac{\Delta p}{2} = \frac{N \Delta p}{2EF}$$

$$u = \frac{U}{V} =$$



# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

Un anneau de cuivre est sertie à chaud, sans jeu et sans serrage, sur un anneau d'acier de même largeur  $B$ . La température du cuivre est de  $\Delta\theta$  plus élevée que celle de l'acier.

Calculer les contraintes dans l'acier et le cuivre, la pression entre les deux anneaux et le raccourcissement relatif de leur rayon commun après refroidissement du cuivre.

$$E_1 = 1,17 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_2 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

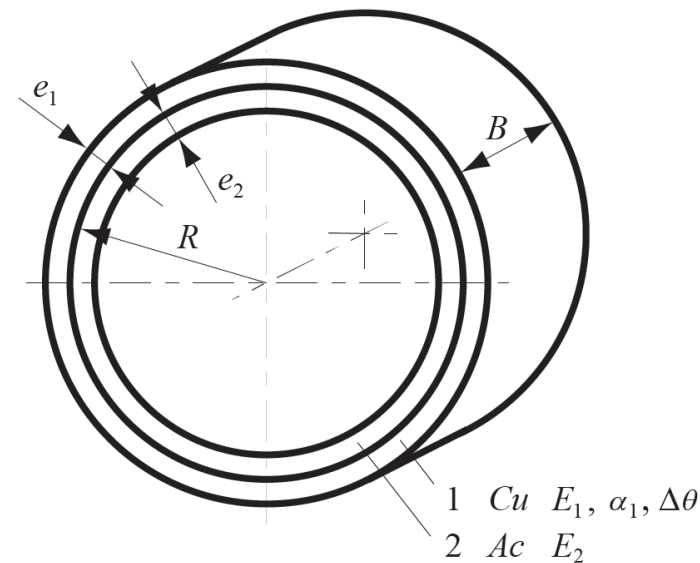
$$e_1 = 0,5 \text{ cm}$$

$$e_2 = 1 \text{ cm}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 16,6 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

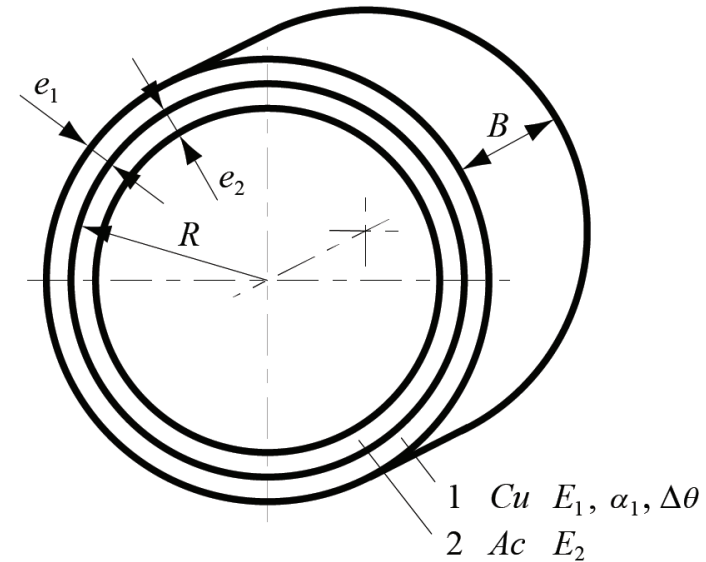
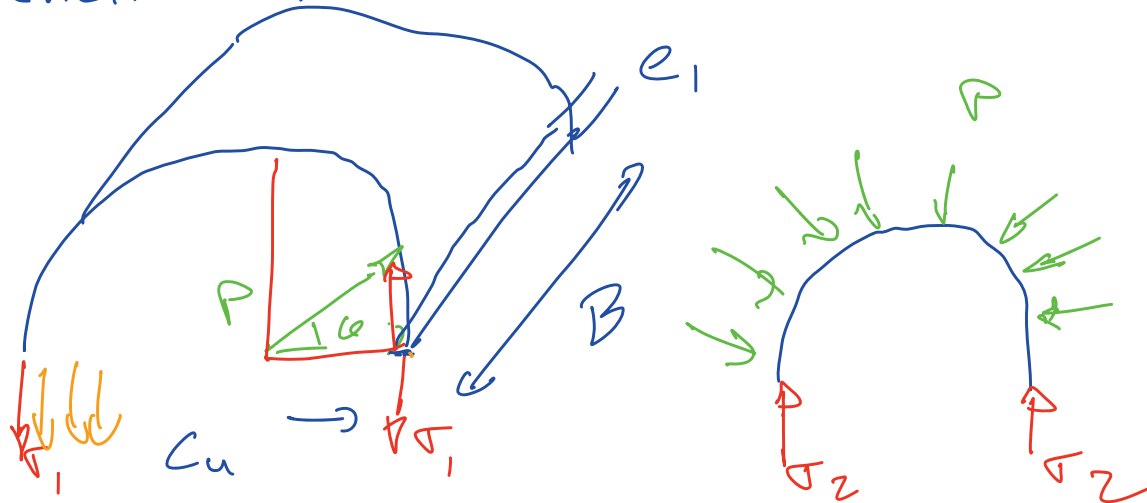
$$\Delta\theta = 200 ^\circ\text{C}$$



# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

1) SCHEMA + HYD.



RAYON MOYEN CONFONDU =  $\bar{r}(r) = \bar{r}$

2) EQUILIBRE FORCE Cu

$$N_1 = \sigma_1 F_1 = \sigma_1 \cdot 2e_1 B$$

$$N_1 = 2 \int_0^{\pi/2} P \sin(e) \frac{dF}{BR de} = 2P RB \int_0^{\pi/2} \sin(e) de = 2P RB$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow \sigma_1 2e_1 B = 2P RB \Rightarrow \boxed{\sigma_1 e_1 = PR}$$

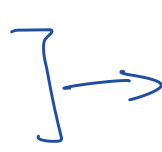
# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

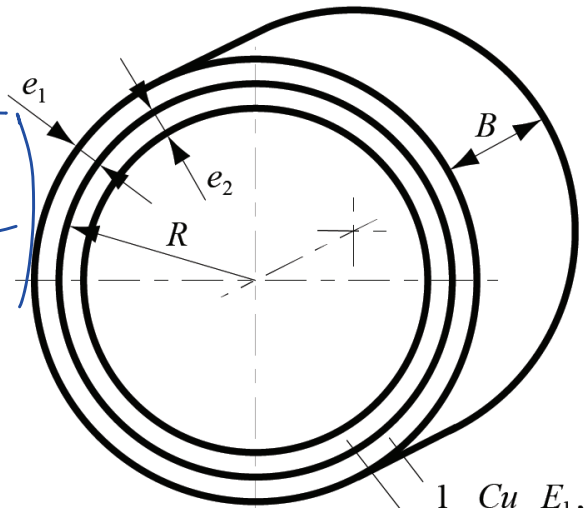
3) EQUILIBRE FORCE AC

$$\sigma_2 e_2 = pR$$

$$\sigma_1 e_1 = pR$$



$$\sigma_1 e_1 = \sigma_2 e_2$$

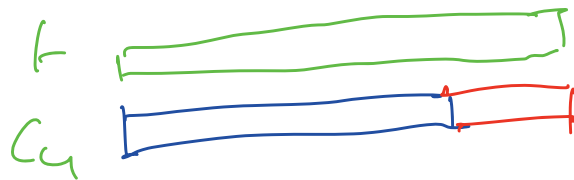


1 Cu  $E_1, \alpha_1, \Delta\theta$   
2 Ac  $E_2$

4) SUPERPOSITION CAS CHARGE

$$\Delta p(Cu) = -\Delta p(Ac)$$

$$\Delta p = \pi \Delta R$$



DILATATION THERM.  $\Delta R_{th} = R \alpha \cdot \Delta\theta$

ALLONGEMENT MECA  $\sigma = \epsilon E = \frac{\Delta p}{p} E = \frac{\Delta R}{R} E \Rightarrow \Delta R_{mecc} = \frac{\sigma R}{E}$

$$\rightarrow \Delta p = \left[ \pi R \Delta\theta \alpha_1 - \pi R \frac{\sigma_1}{E_1} \right] = \pi R \frac{\sigma_2}{E_2}$$

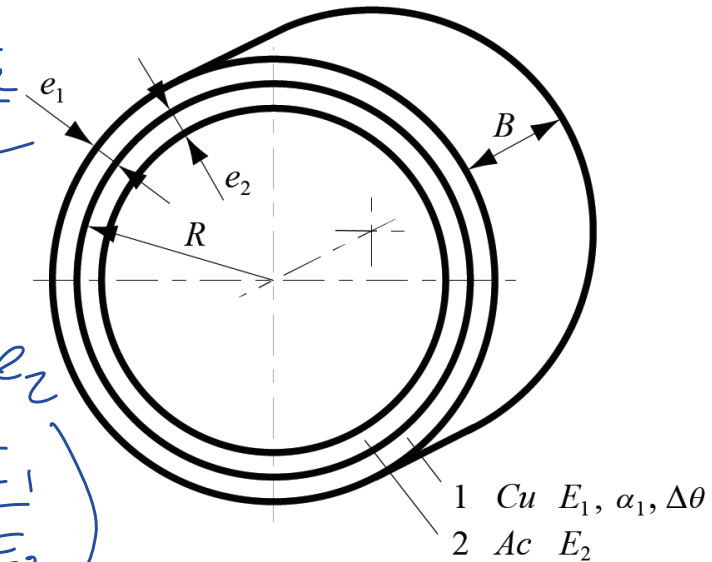
# Chapitre 2 : Traction ou compression simple

## Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

5) RESOLUTION

$$\Delta p = \cancel{\pi R} \Delta \theta \alpha_1 - \cancel{\pi R} \frac{\sigma_1}{E} = \pi R \frac{\sigma_2}{E_2} e_1$$

$$\Delta \theta \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_1 e_1}{e_2 E_2} = \frac{\sigma_1}{E_1} \left( 1 + \frac{e_1 E_1}{e_2 E_2} \right)$$



$$\sigma_1 e_1 = \sigma_2 e_2$$

$$d = \frac{e_2 E_2}{e_1 E_1}$$

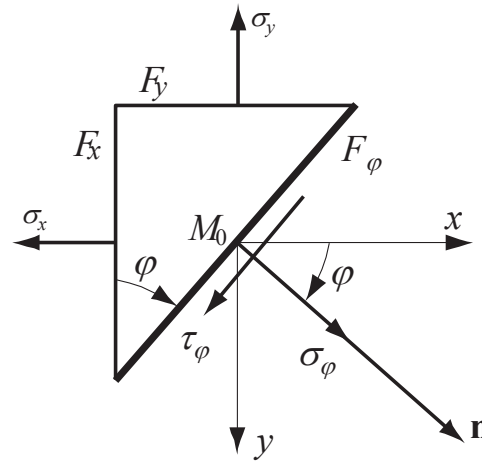
$$\sigma_1 = \Delta \theta \alpha_1 E_1 \frac{2}{1+d} = 304 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{e_1}{e_2} = 152 \text{ MPa}$$

$$p = \frac{\sigma_1 E_1}{R} = 15.1 \text{ MPa}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.72\%$$

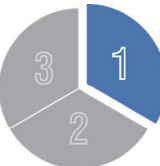
# Mécanique des structures



## Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

Pr. Shea & Dr Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**



## Exemple plaque carrée

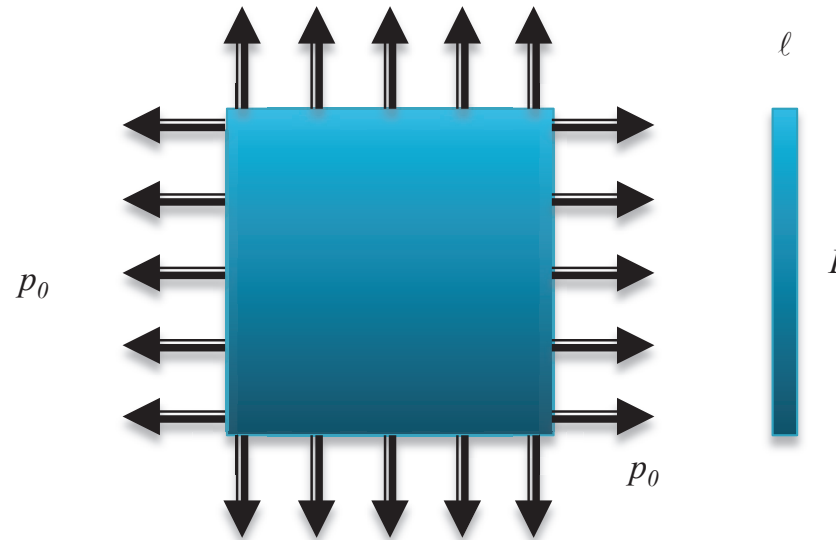
Une plaque carrée, en acier laminé à chaud, de 50 cm de côté et 2 mm d'épaisseur, subi sur son contour une charge linéique de  $p_0 = 2 \times 10^5$  N/m.

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$\ell = 2 \text{ mm}$$

$$E = 201 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.27$$



Calculer :

- 1) Les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  au centre de la plaques et la contrainte de cisaillement sur le plan à  $45^\circ$
- 2) Les allongements relatif  $\varepsilon$  et absolu  $\Delta L$  des côtés
- 3) La variation relative de volume
- 4) La densité d'énergie

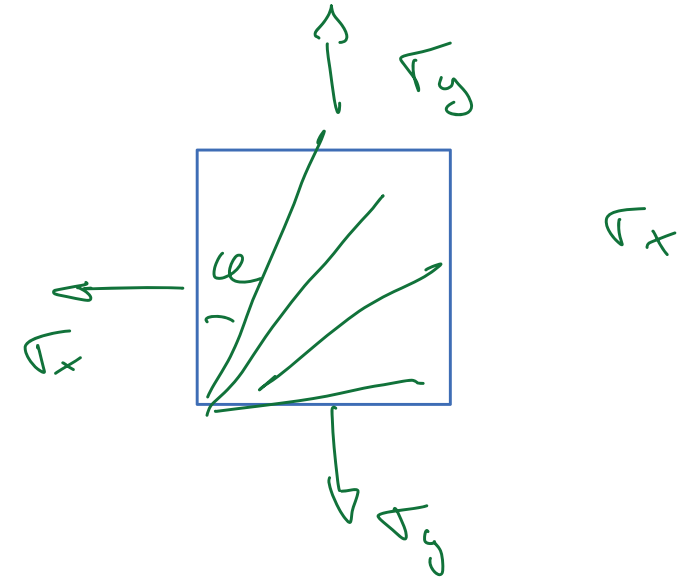
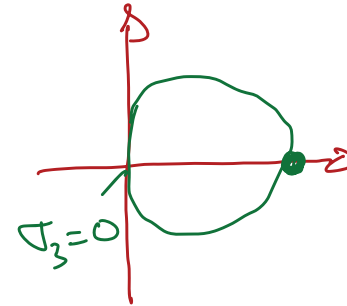
# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée

1) CONTRAINTE

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{N}{F} = \frac{P_0 \cdot L}{pL} = \frac{P_0}{p} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x \quad \sigma_3 = 0$$



2) ALLONGEMENT

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_x + \mu \sigma_y) = 3.48 \cdot 10^{-4} [-]$$

$$\Delta L = \varepsilon L = \frac{\Delta L}{L} L = \underline{\underline{0,1788 \text{ mm}}} \quad \varepsilon = \frac{1}{30} = \varepsilon_e \quad \leftarrow \rightarrow$$

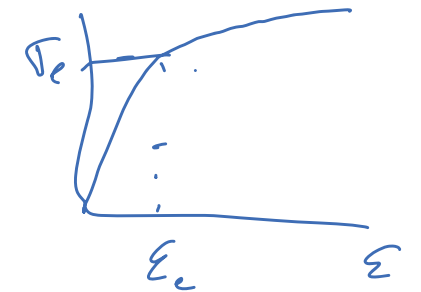
3) VARIATION DE VOLUME

$$v = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) (\sigma_x + \sigma_y) = 4,38 \cdot 10^{-4}$$

4) DENSITE ENERGIE

$$\sigma_x + \sigma_y = \varepsilon E$$

$$u = \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2} - \mu \sigma_x \sigma_y \right) = 34'761 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$



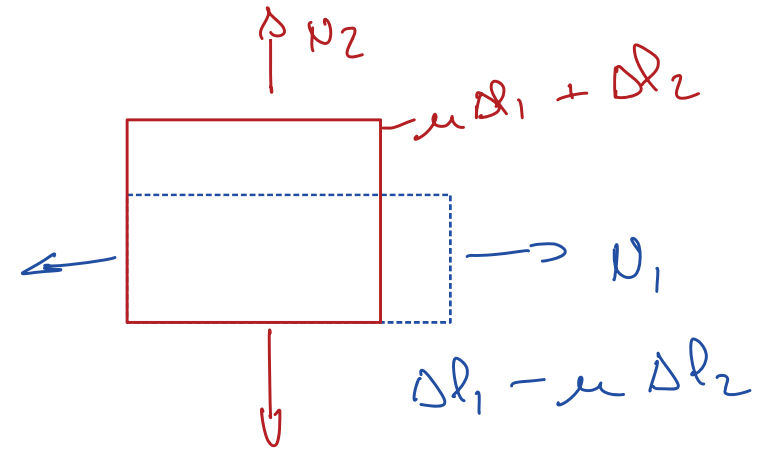
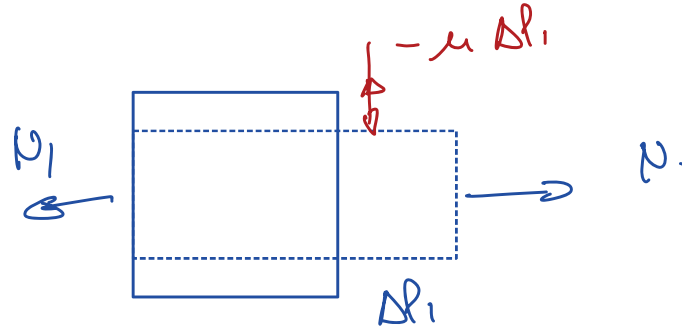
$$\sigma = \varepsilon E$$

# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée

$$u = \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2} - \mu \sigma_x \sigma_y \right)$$

$$U = \frac{N_1 \Delta l_1}{2}$$



$$U = \frac{N_1 = \sigma_1 F_1}{2} (\Delta l_1 - \mu \Delta l_2) + \frac{N_2 = \sigma_2 F_2}{2} \Delta l_2$$

$$u = \frac{U}{V} = \frac{U_1}{F_1 l} + \frac{U_2}{F_2 l} = \frac{F_1}{2 l} \left( \frac{\Delta l_1}{l} - \mu \frac{\Delta l_2}{l} \right) + \frac{\sigma_2}{2} \frac{\Delta l_2}{l}$$

$$= \frac{1}{E} \left( \sigma_1^2 - \mu \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \right)$$

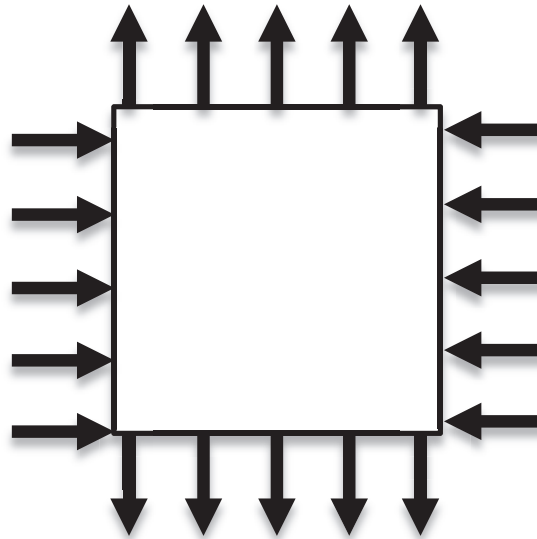
$$\epsilon_1 = \frac{F_1}{E l} \quad \epsilon_2 = \frac{F_2}{E l}$$

#

# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

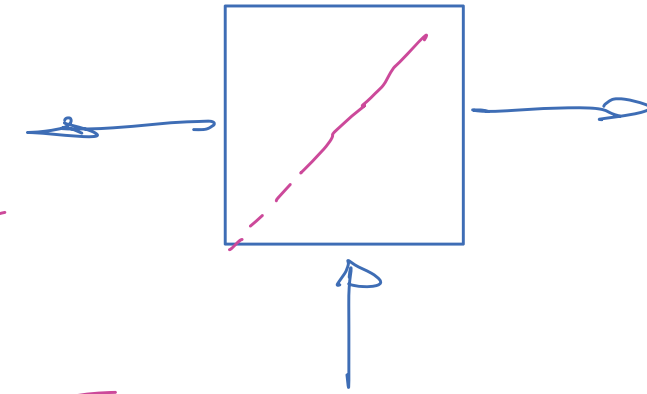
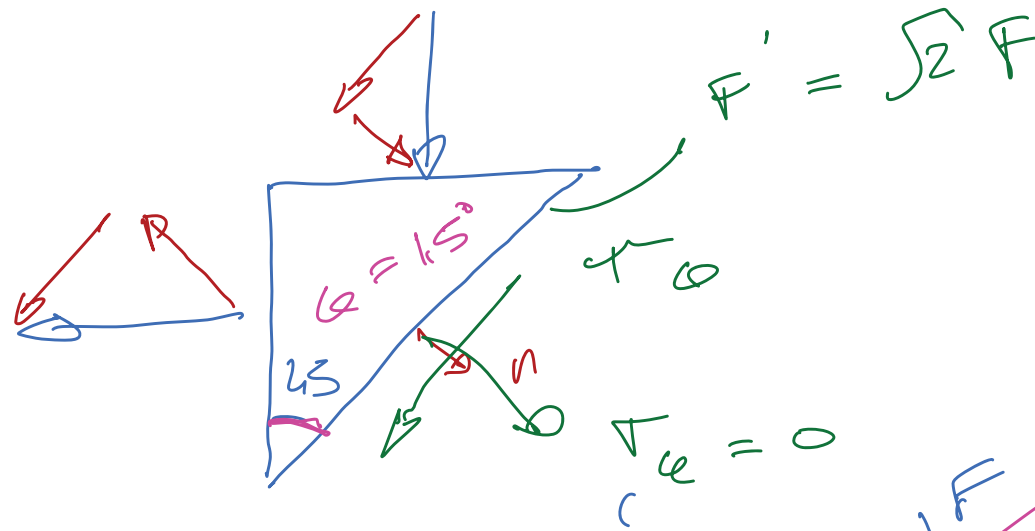
## Exemple plaque carrée en traction - compression

Illustrer la réciprocity d'un état de contrainte en traction – compression (équivalentes) avec un état de contrainte en cisaillement pur (dessiner le cercle de Mohr)



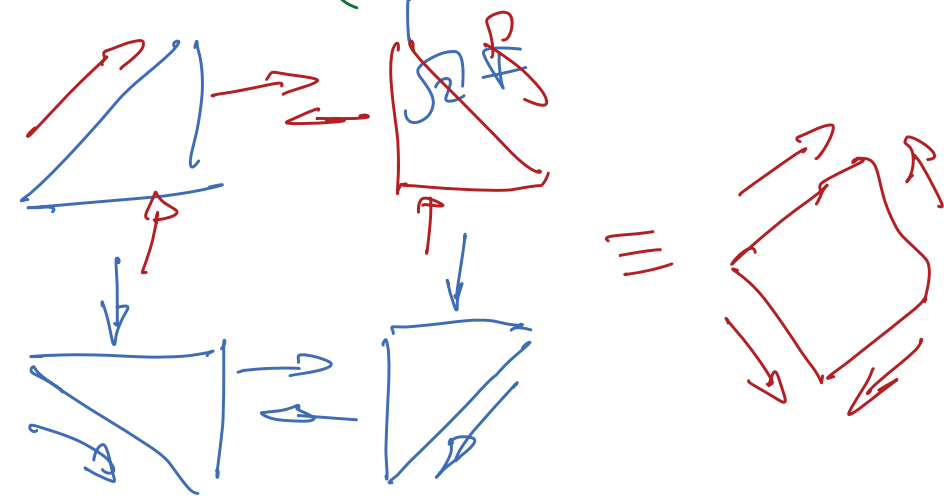
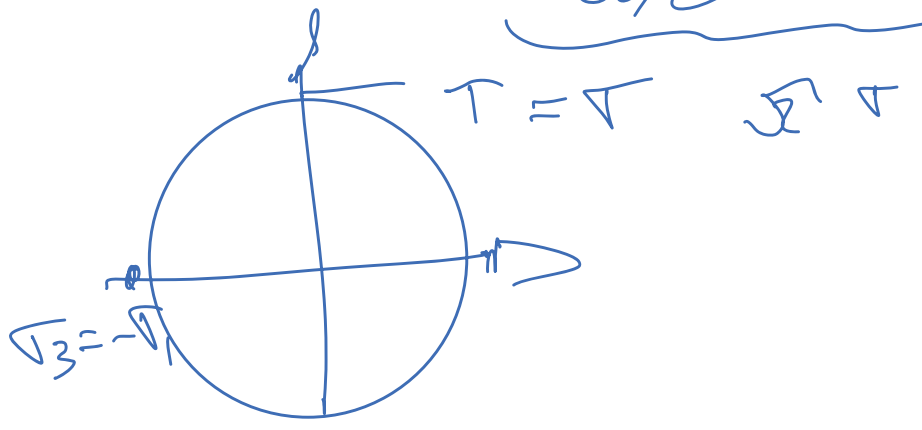
# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée



$$\sum F_n = (\sigma \cos 45^\circ - \tau \cos 45^\circ) = 0 \Rightarrow \tau_{\alpha} = 0$$

$$\sum F_{nT} = \left( \tau \sin 45^\circ + \sigma \sin 45^\circ \right) F + \tau_{\alpha} F' = 0 \Rightarrow \tau_{\alpha} = \sigma$$

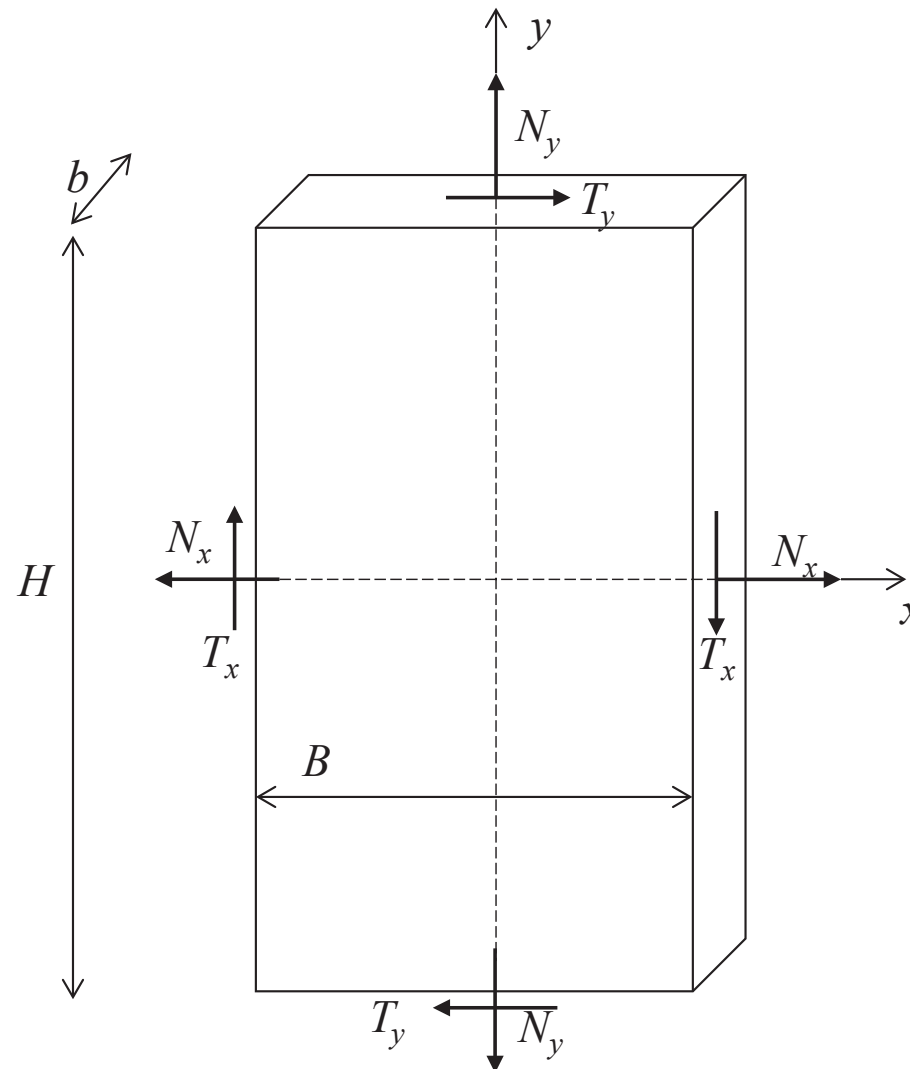


# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

## Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

La figure montre un bloc solide soumis à un état de contraintes pour lequel on connaît les composantes normales et tangentielles. Déterminer, par le calcul et sur le cercle de Mohr, les valeurs des contraintes principales.

- $N_x = 2 \times 10^5 \text{ N}$
- $N_y = -3.6 \times 10^4 \text{ N}$
- $T_x = 9 \times 10^4 \text{ N}$
- $B = 6 \text{ cm}$
- $b = 1 \text{ cm}$
- $H = 10 \text{ cm}$



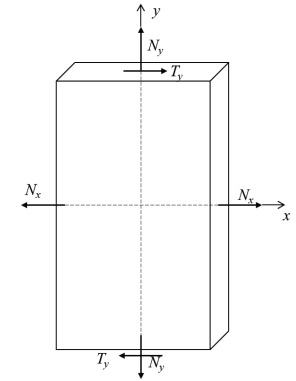
# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

## 1) CONTRAINTES NORMALES

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

$$\sigma_x = \frac{N_x}{bH} = \frac{200'000}{10 \times 100} = \underline{\underline{200}} \text{ [MPa]} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{Bb} = \frac{-36'000}{60 \times 10} = \underline{\underline{-60}} \text{ [MPa]}$$



## 2) CONTRAINTES TANGENTIELLES

$$\tau_x = \frac{T_x}{bH} = \frac{90'000}{10 \times 100} = \underline{\underline{90}} \text{ MPa}$$

$$\tau_y = -\tau_x \Rightarrow T_y = \tau_y Bb = \underline{\underline{54}} \text{ kN}$$

# Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

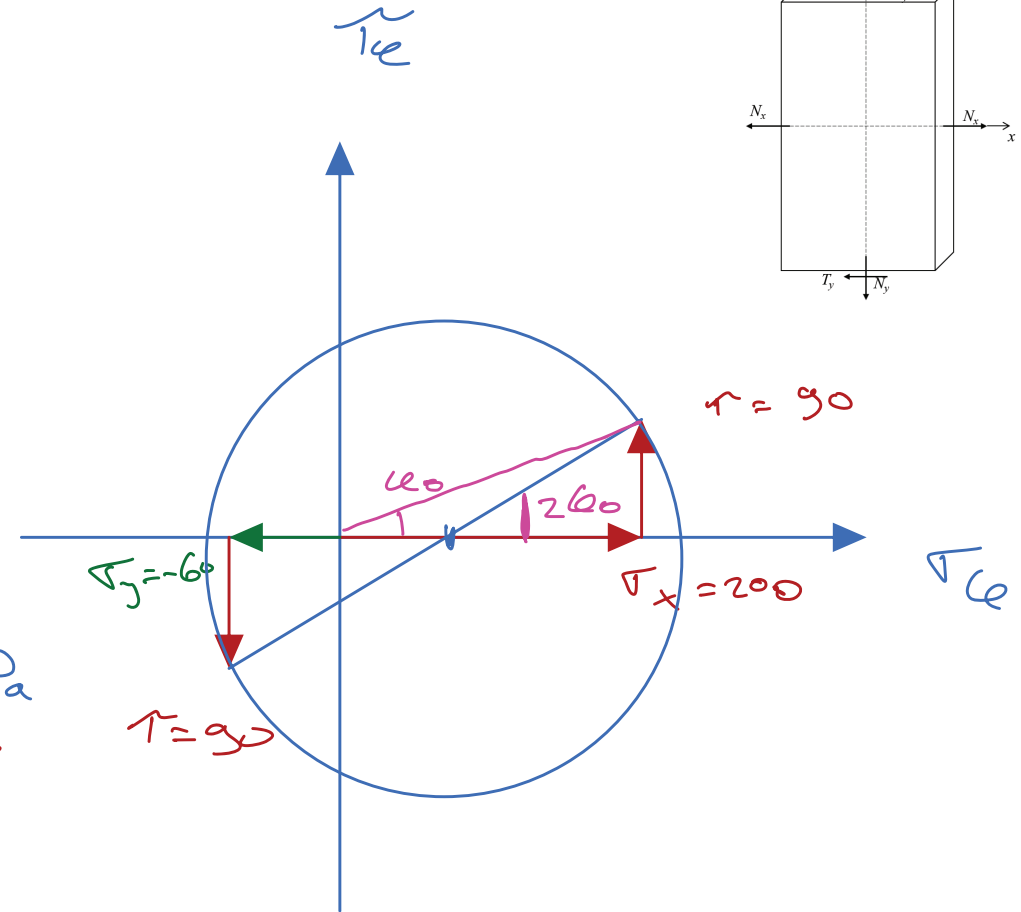
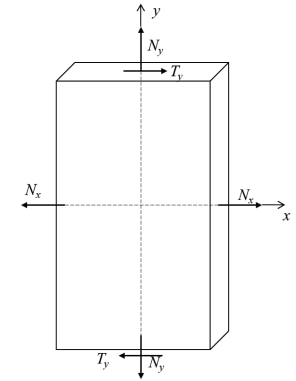
$$R = \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = \underline{\underline{158 \text{ MPa}}}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \underline{\underline{26^\circ}}$$

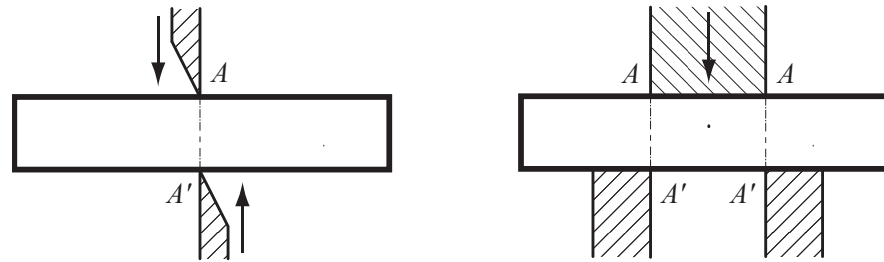
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \underline{\underline{228 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \underline{\underline{-88 \text{ MPa}}}$$



# Mécanique des structures



## Chapitre 4 : Cisaillement simple

Dr. Alain Preneloup  
SGM BA3 2022-2023

**EPFL**

## Déformation en cisaillement simple

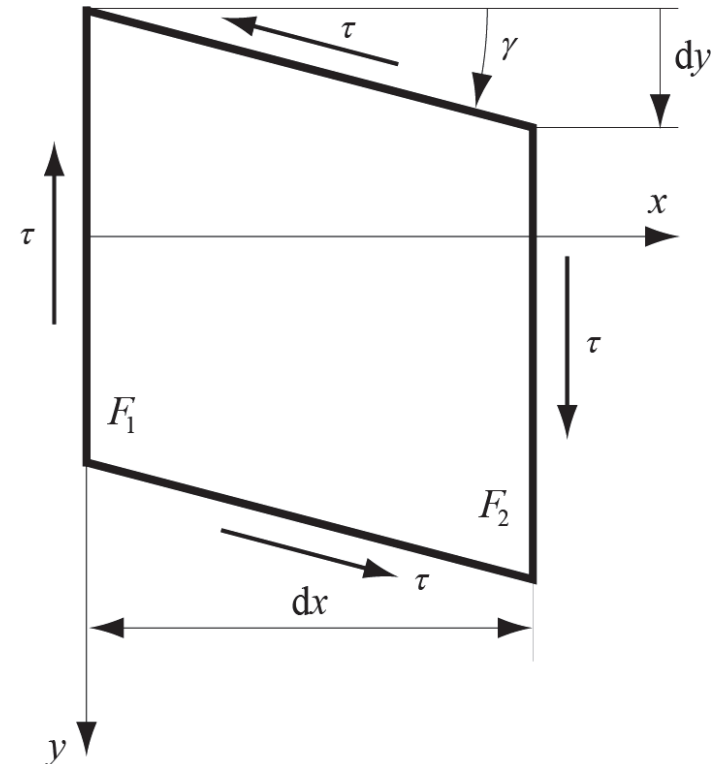
Considérons un élément de matière de longueur  $dx$  compris entre deux sections  $F_1$  et  $F_2$  infiniment proches, le moment de flexion  $T dx$  étant ainsi négligeable en comparaison de l'effort tranchant  $T$ .

Par rapport à la face  $F_1$  supposée fixe, la section  $F_2$  est décalée d'une distance  $dy$  proportionnelle à  $dx$  et à la contrainte de cisaillement  $\tau$

- $dy = \frac{1}{G} dx \cdot \tau$

Dans cette expression, le rapport  $dy/dx = \gamma$  est l'*angle de glissement* et le facteur de proportionnalité  $G$  est le *module de glissement*, ces deux coefficients étant par conséquent liés par la relation

- $\gamma = \frac{\tau}{G}$



# Chapitre 4 : Cisaillement simple

## Déformation en cisaillement simple

ELEMENT DE LONGUEUR  $dx$  ENTRE FACE  $F_1$  ET  $F_2$

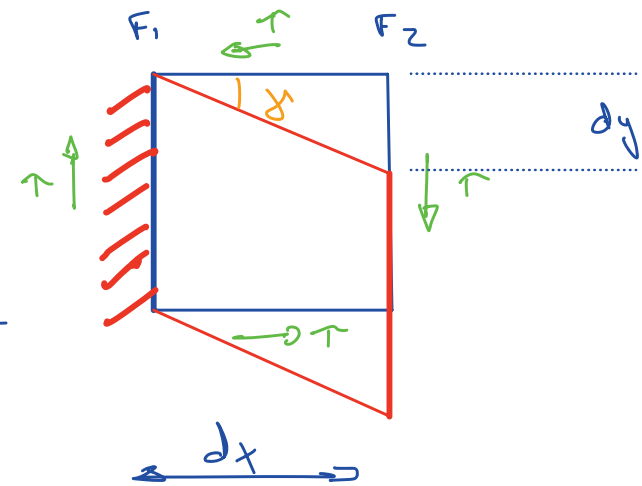
$dx \rightarrow 0$  MOMENT FLEXION NEGLIGEABLE (UNIQUEMENT EFFORT TRANCHANT)

DEPLACEMENT  $F_2$  EST PROPORTIONNELLE A

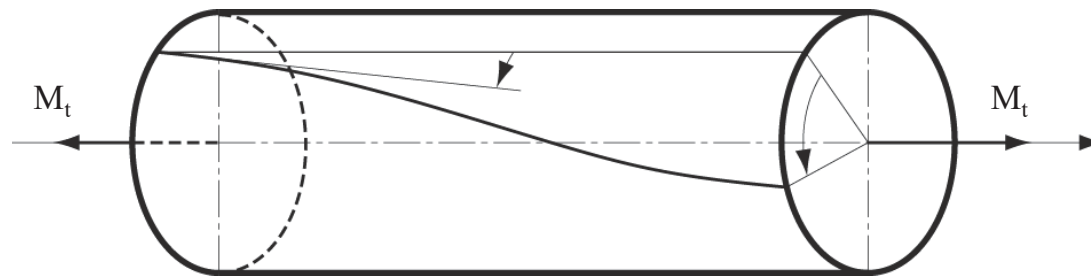
$$dy = dx \cdot \tau \cdot \frac{\text{CONSTANTE}}{\hookrightarrow \frac{1}{g} \text{ MODULE GLISSEMENT}}$$

ANGLE DE GLISSEMENT

$$\gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{\tau}{g}$$



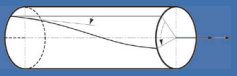
# Mécanique des structures



## Chapitre 5 : Torsion simple

Pr. Shea & Dr Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**



# Chapitre 5 : Torsion simple

## Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'introduction des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  permet d'écrire

- $y = r \cos \theta \rightarrow \tau_y = -\tau \sin \theta = -k r \sin \theta$
- $z = r \sin \theta \rightarrow \tau_z = \tau \cos \theta = k r \cos \theta$

de sorte que les équations (b) et (c) ont pour expression, compte tenu de  $dF = r dr d\theta$

- $T_y = -k \iint_F r \sin \theta dF = -k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$
- $T_z = k \iint_F r \cos \theta dF = k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$

Elles sont identiquement nulles quelle que soit la valeur  $k$ , la distribution des  $\tau$  satisfaisant donc les conditions  $T_y = 0$  et  $T_z = 0$ .

La relation (d) va nous permettre de calculer la constante  $k$ , puisqu'en y insérant les composantes  $\tau_y$  et  $\tau_z$  et en utilisant les coordonnées polaires

- $M_t = k \iint_F r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dF = k \iint_F r^2 dF = k I_p$



# Chapitre 5 : Torsion simple

## Contrainte de cisaillement en torsion simple

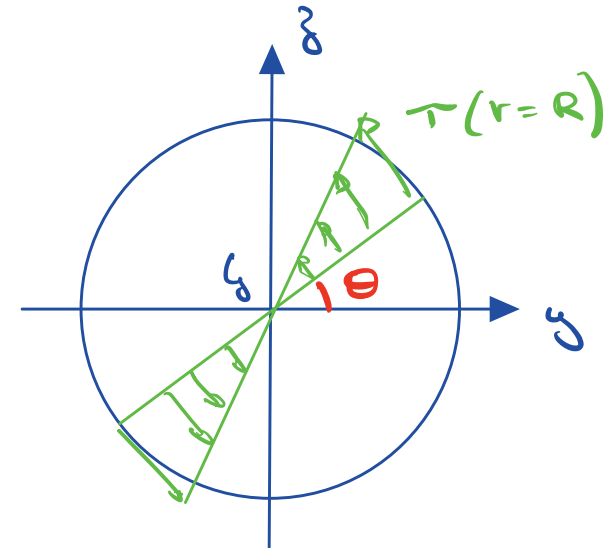
$$M_t = \iint_F \tau_{zy} y - \tau_{yz} z \, dF$$

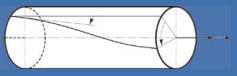
COORDONNEE CYLINDRIQUE

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = -\tau \sin \theta = -kr \sin \theta \\ \tau_{zy} = -\tau \cos \theta = -kr \cos \theta \end{cases}$$

$$M_t = k \iint_F r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \, dF = k \underbrace{\iint_F r^2 \, dF}_{\text{INERTIE POLAIRE}} = k I_p$$





# Chapitre 5 : Torsion simple

## Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'intégrale constitue le *moment d'inertie polaire*  $I_p$  de la section

- $$I_p = \iint_F r^2 dF$$

Ce qui permet de définir la constante  $k$  comme étant

- $$k = \frac{M_t}{I_p}$$

Ce qui permet d'explicité la contrainte  $\tau$  sous la forme

- $$\tau = k r = \frac{r M_t}{I_p}$$

L'état de contrainte de la torsion circulaire est donc un *cisaillement pur*, mais la contrainte tangentielle  $\tau$  varie en intensité et direction. Sa valeur maximale apparaît sur la surface extérieure du barreau

- $$\tau_{max} = \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}$$



# Chapitre 5 : Torsion simple

## Contrainte de cisaillement en torsion simple

ON PEUT ALORS DEFINIR

$$k = \frac{M_t}{I_p}$$

ET FINALEMENT

$$\tau = k r = \frac{r M_t}{I_p}$$

CONTRAINTE CIRCULAIRE MAX

$$\tau_{\max} = \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}$$

# Annexe III Moment d'une aire plane

## Moment du second ordre : surface rectangulaire

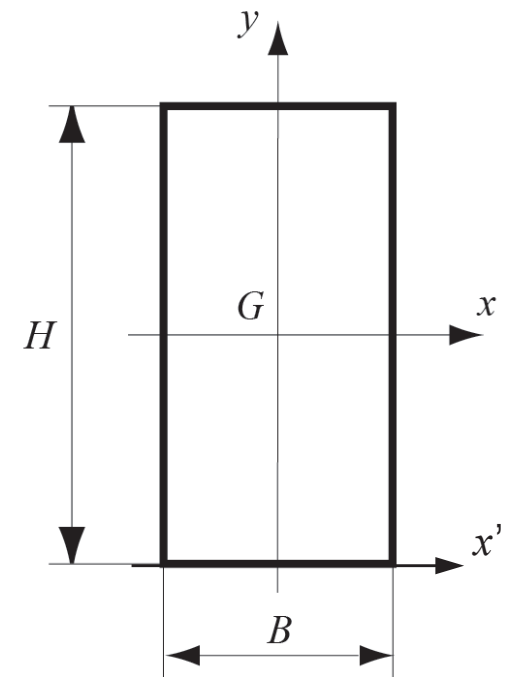
Le calcul par intégration du moment du second ordre d'un rectangle par rapport à l'axe  $x$  passant par le centre de gravité

- $$I_x = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 dF$$
$$= x \Big|_{-B/2}^{B/2} \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-H/2}^{H/2} = \frac{BH^3}{12}$$

- $$I_{x'} = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=0}^H y^2 dF = \frac{BH^3}{3}$$

Approche discrète

- $$I_{x'} = I_x + \sum y^2 F = \frac{BH^3}{12} + \frac{H^2}{4} BH = \frac{BH^3}{3}$$



NOTE

$I_x$



# Annexe III Moment d'une aire plane

## Moment du second ordre : surface rectangulaire

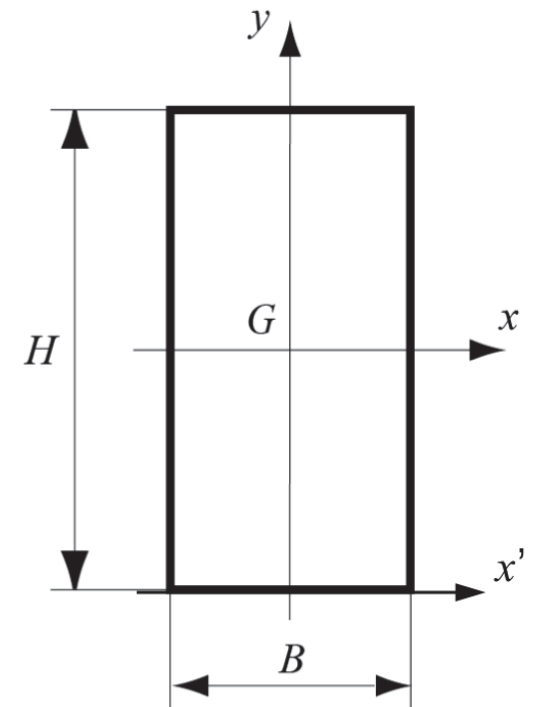
MOMENT INERTIE POLAIRE

$$I_P = \iint_F r^2 dF = \iint_F x^2 dF + \iint_F y^2 dF$$

$\uparrow$   
 $r^2 = x^2 + y^2$

MOMENT INERTIE SELON AXE X

$$I_x = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 dF$$
$$= x \Big|_{-B/2}^{B/2} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-H/2}^{H/2} = \frac{B H^3}{12}$$



# Annexe III Moment d'une aire plane

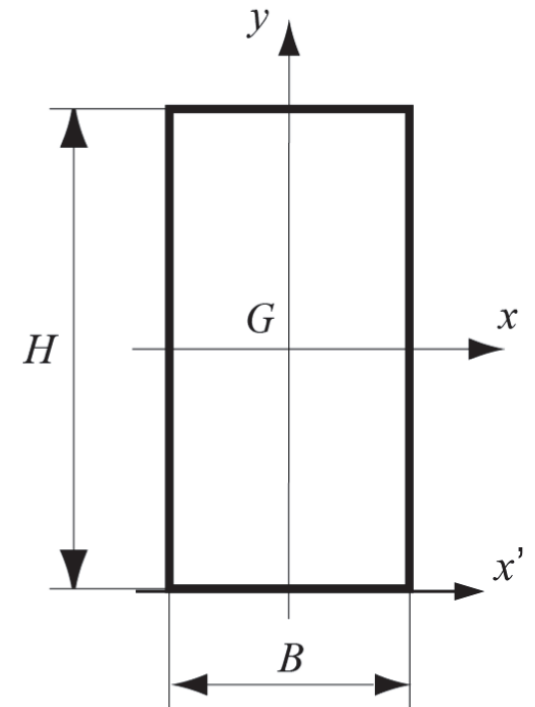
## Moment du second ordre : surface rectangulaire

MOMENT INERTIE SELON AXE  $x'$

$$I_{x'} = \int_{x=-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{y=0}^H y^2 dF = \frac{BH^3}{3}$$

APPROCHE DISCRETE

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x + \sum y^2 F \\ &= \frac{BH^3}{12} + \frac{H^2}{4} BH = \frac{BH^3}{3} \end{aligned}$$

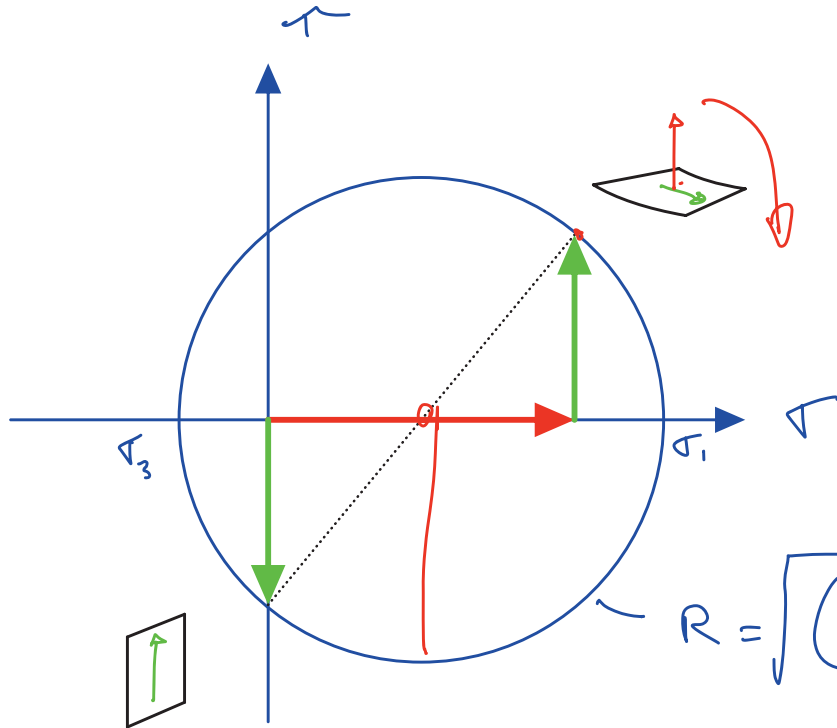


# Exemple

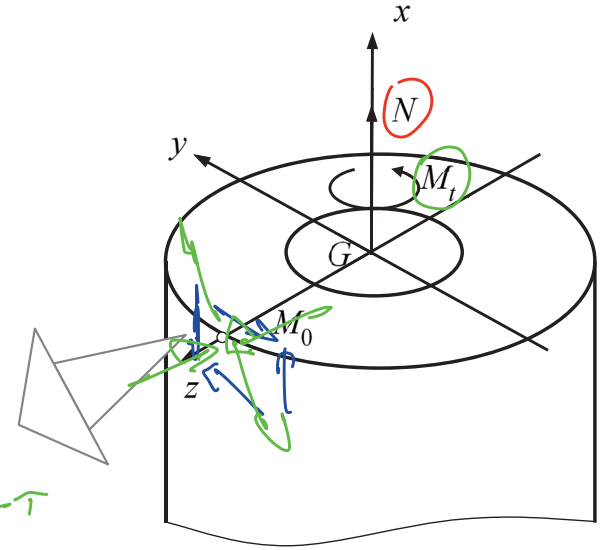
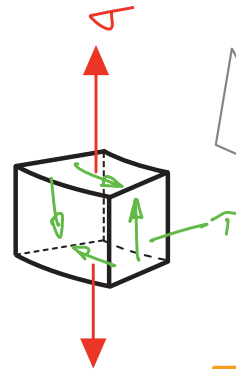
1) CERCLE DE MOHR

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

$$\tau = \frac{R M_t}{I_P}$$



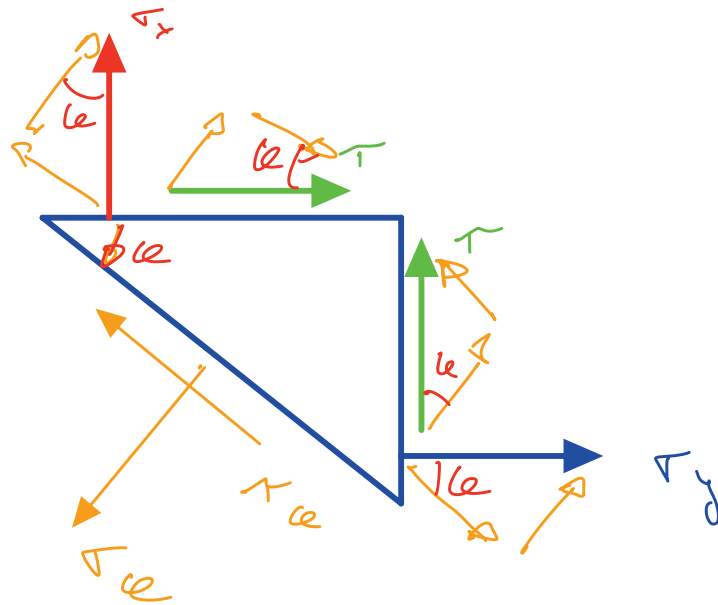
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + R$$
$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - R$$

# Exemple

## 2) EQUILIBRE DES FORCES

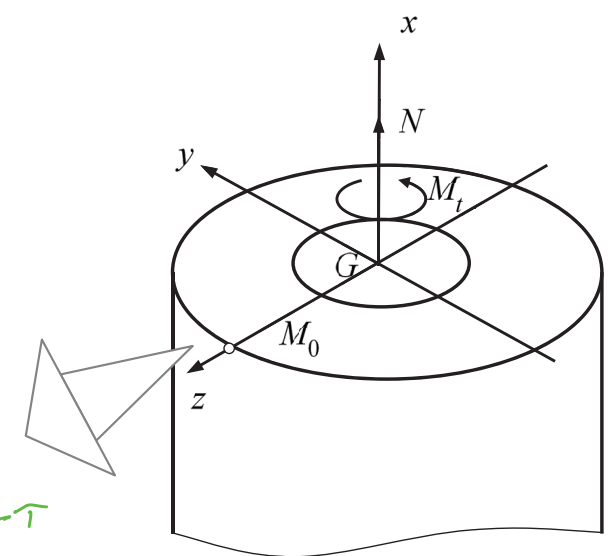
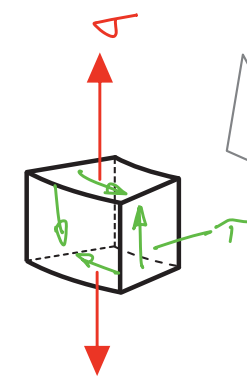


$$F_y = F_e \sin \alpha$$

$$\sum F_n \quad F_e \tau_e - F_y (\tau_y \sin \alpha + \tau \cos \alpha) - F_x (\tau_x \cos \alpha + \tau \sin \alpha) = 0$$

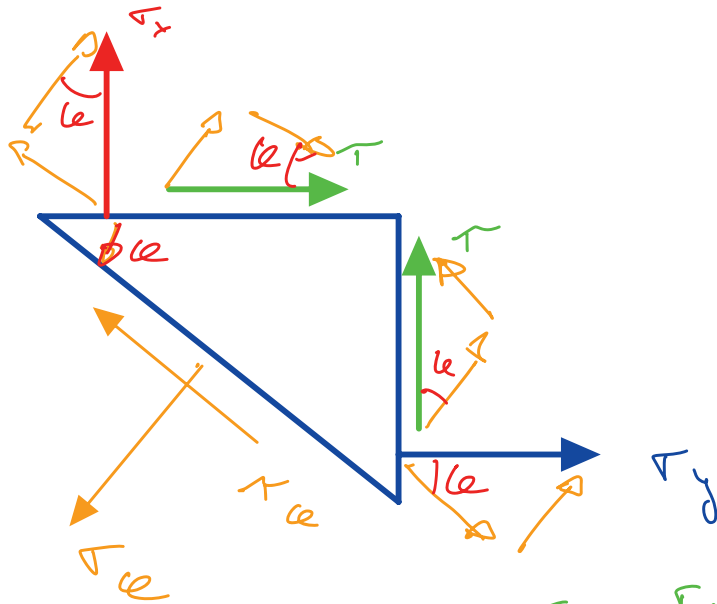
$$\uparrow F_x = F_e \cos \alpha$$

$$\tau_e = \tau_y \sin^2 \alpha + \tau_x \cos^2 \alpha + 2\tau \cos \alpha \sin \alpha$$



# Exemple

SUITE EQUILIBRE DES FORCES



$$F_x = F_0 \cos \alpha$$

$$F_y = F_0 \sin \alpha$$

$\sum F_{nt}$

$$\tau_\alpha F_0 + F_x (\sigma_x \sin \alpha - \tau \cos \alpha) + F_y (-\sigma_y \cos \alpha + \tau \sin \alpha)$$

$$\tau_\alpha = (-\sigma_x + \sigma_y) \cos \alpha \sin \alpha + \tau (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

# Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta} = \sigma_y \overbrace{\sin^2 \theta}^{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} + \sigma_x \overbrace{\cos^2 \theta}^{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} + 2\tau \overbrace{\cos \theta \sin \theta}^{\frac{\sin 2\theta}{2}} \\ \tau_{\theta} = (-\sigma_x + \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + \tau (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2} (1 - \cos 2\theta) + \tau \sin 2\theta \\ = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta \\ \tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta \end{array} \right.$$

# Exemple

CONTRAINTES PRINCIPALES EN  $\tau(\varphi_0) = 0$

$$\tau(\varphi_0) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi_0 + \tau \cos 2\varphi_0 = 0 \quad \left| \frac{1}{\cos 2\varphi_0} \right.$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma(\varphi_0) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi_0 + \tau \sin 2\varphi_0$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left( x - \overset{\varphi_0}{\tan^{-1} \frac{b}{a}} \right) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sigma(\varphi_0) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

$\cos(2\varphi_0 + \pi) = -1$

# Exemple

## 3) APPROCHE MATRICIELLE

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

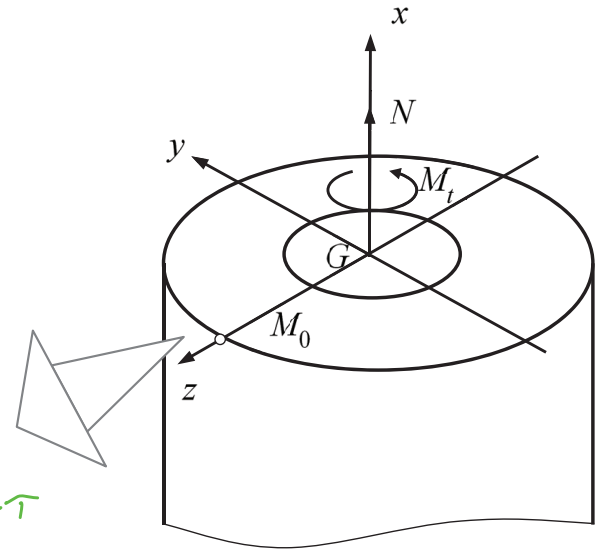
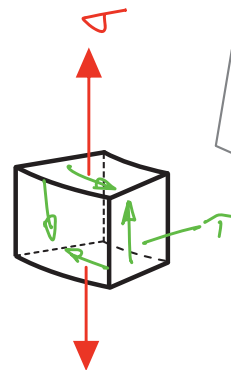
$$\det(\sigma - \lambda I) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

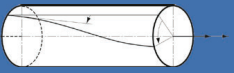
$$= \lambda^2 (\sigma_x - \lambda) + \lambda \tau^2$$

$$= \lambda \left( -\lambda^2 + \sigma_x \lambda + \tau^2 \right) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{-\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 - 4\tau^2}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$





# Chapitre 5 : Torsion simple

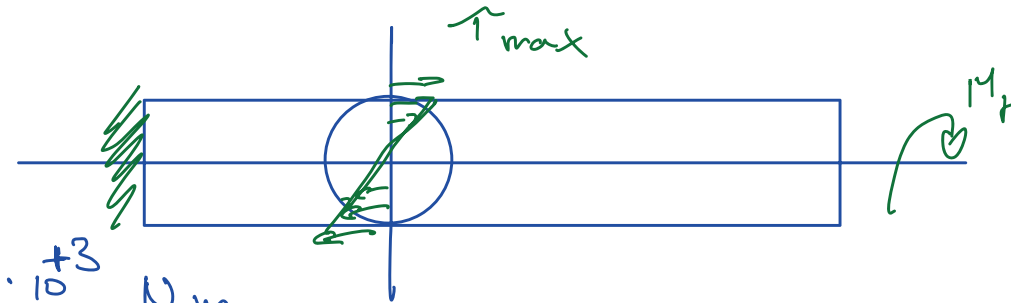
## Problème 5.1

En choisissant une contrainte de cisaillement admissible  $\tau_{adm}$  de 50 MPa, calculer le diamètre – supposé uniforme – d'un arbre de turbine à gaz transmettant une puissance de 25 MW à 8000 t/min

1) PUISSANCE

$$P = \frac{E}{F} = M_t \cdot \omega$$

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{25 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 8000 \cdot \frac{1}{60}} = 29.8 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

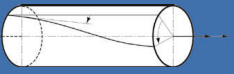


2) CONTRAINTE ADMISSIBLE =  $\tau_{MAX} = 50 \text{ MPa}$

$$\tau_{MAX} = \frac{R M_t}{I_p} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow \tau_{ADM} = \frac{D M_t}{\frac{2 \pi D^4}{32}} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

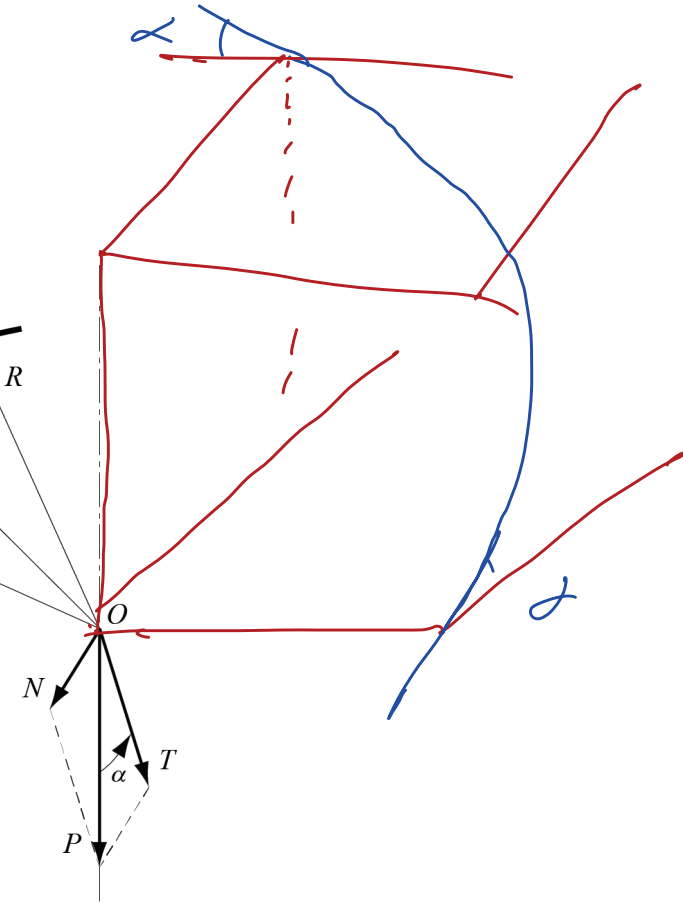
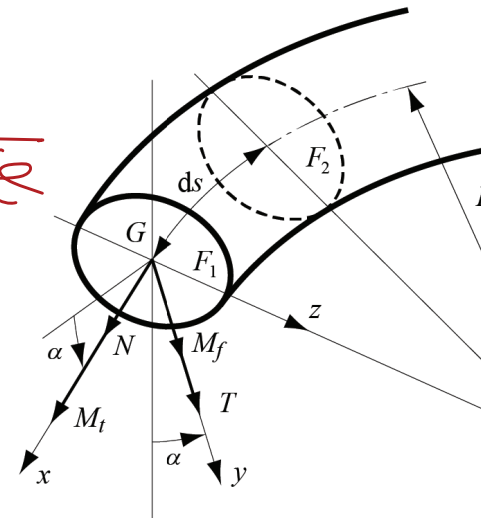
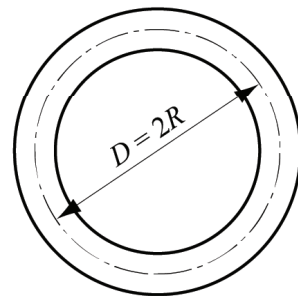
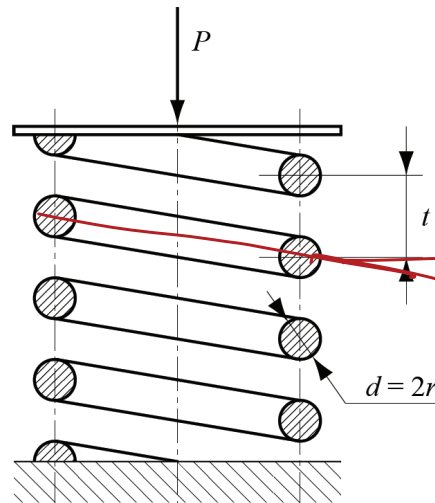
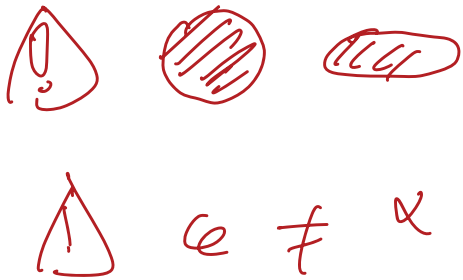
$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_{ADM}}} \approx \underline{\underline{141.5 \text{ cm}}}$$



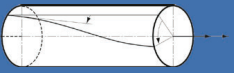
# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre  $D$ , formé de  $n$  spires de diamètre  $d$  et soumis à une charge de compression  $P$ . Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.



NOTE



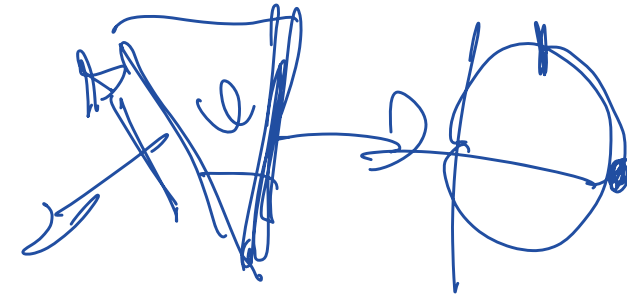
# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.2

1) EQUILIBRE FORCES

SELON  $g_x$   $N = P \sin \alpha$

$g_y$   $T = P \cos \alpha$

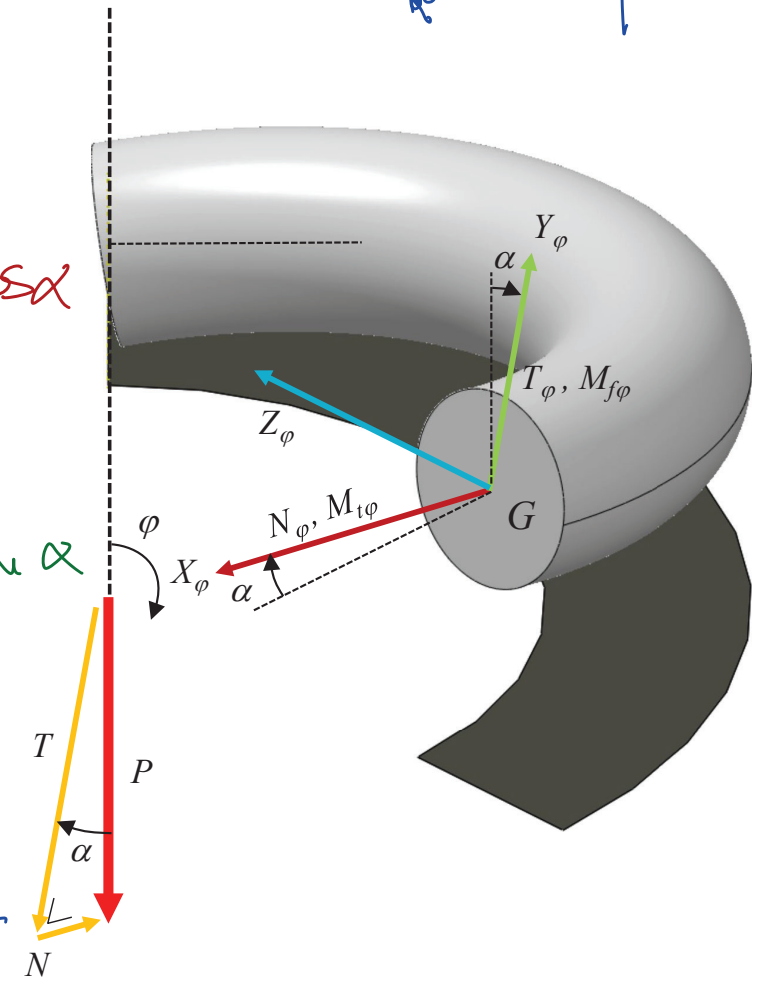


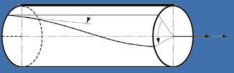
2) EQUILIBRE MOMENTS

SELON  $g_x$   $M_T = T R = P R \cos \alpha$

$g_y$   $M_f = N \cdot R = P R \sin \alpha$

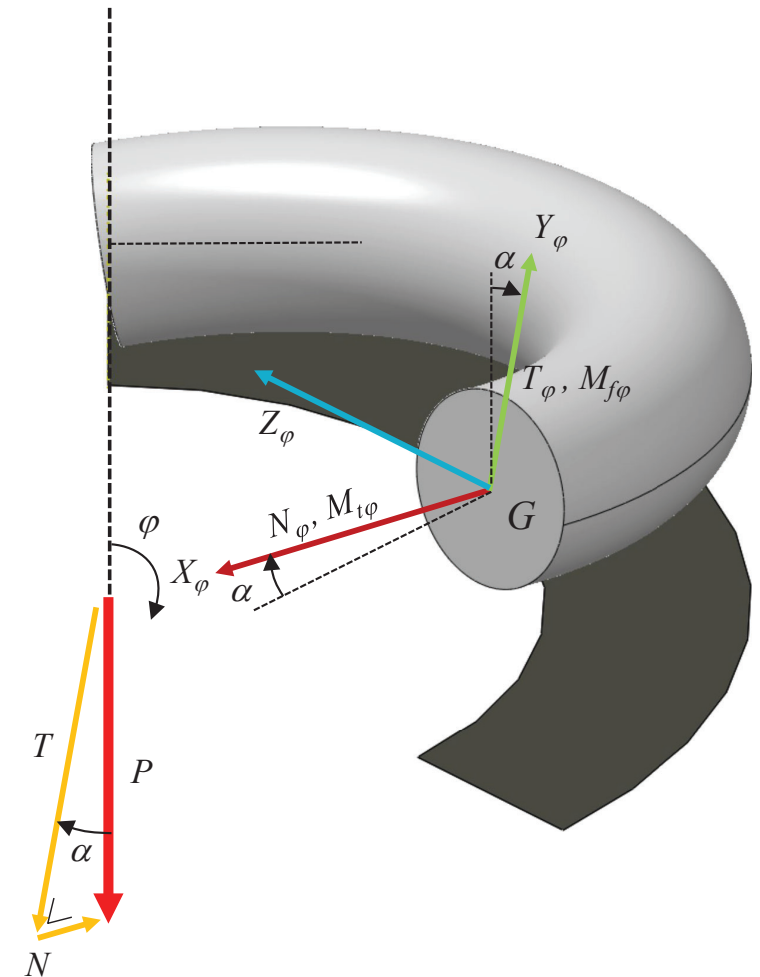
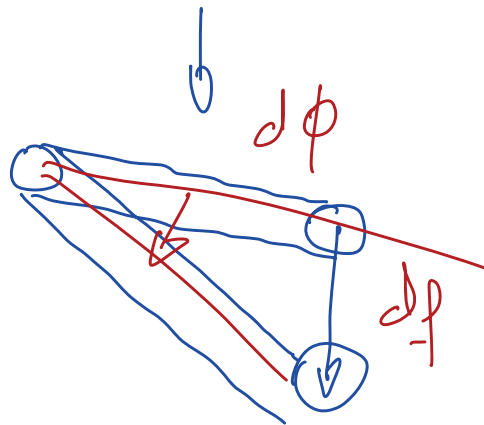
3)  $\tau_{MAX} = \frac{d/2 M_t}{I_p} = \frac{d/2 M_t}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$   
 $= \frac{16 P R \cos \alpha}{\pi d^3} = \frac{16 P R}{\pi d^3} = \frac{8 P D}{\pi d^3}$

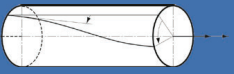




5) FLECHE DE DEFORMATION

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{G I_P} \quad \Rightarrow \quad d\phi = R \frac{M_t dx}{G I_P}$$
$$df = R d\phi$$





# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.2

5) FLECHE TOTAL

$$f = \int_0^p df$$

LONGUEUR RESSORT

$$p = \frac{n \pi D}{\cos \alpha} \approx n \pi D$$

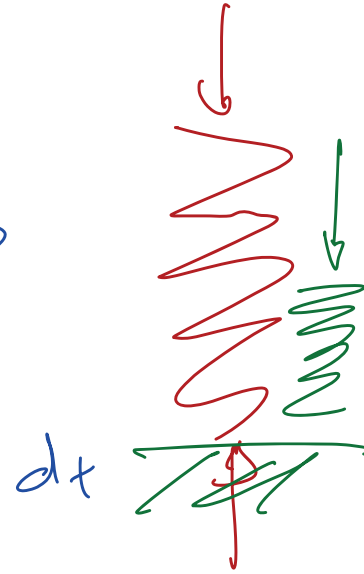
$$\rightarrow f = \int_0^{n \pi D} R \frac{M_t}{I_p g} dx$$

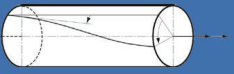
$$= \int_0^{n \pi D} R \frac{R \cos \alpha}{g \frac{\pi d^4}{32}} dx$$

$$= \int_0^{n \pi D} \frac{R D^2}{4g} \frac{32}{\pi d^4} dx$$

$$d_k = \int \frac{8 R D^2}{\pi g d^4} dx$$

$$= \frac{8 n \pi D^3}{g d^4}$$





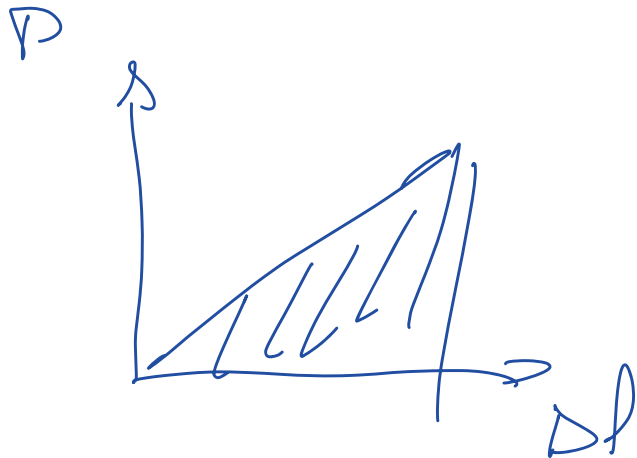
6) RIGIDITE DU RESSORT

$$k = \frac{P}{f} = \frac{G d^4}{8 n D^3}$$

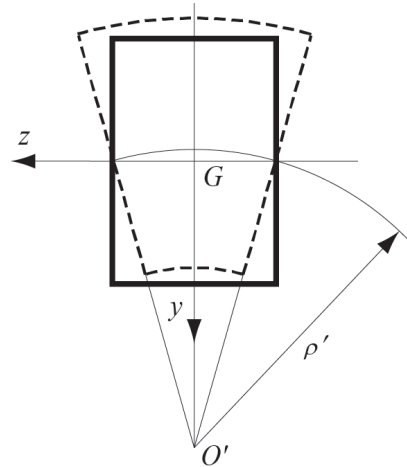


7) ENERGIE EMMAGASINEE

$$U = P \frac{f}{2} = \frac{k n P^2 D^3}{G d^4}$$



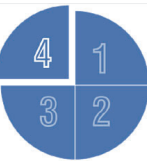
# Mécanique des structures



## Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Dr. Alain Preneloup  
SGM BA3 2022-2023

**EPFL**



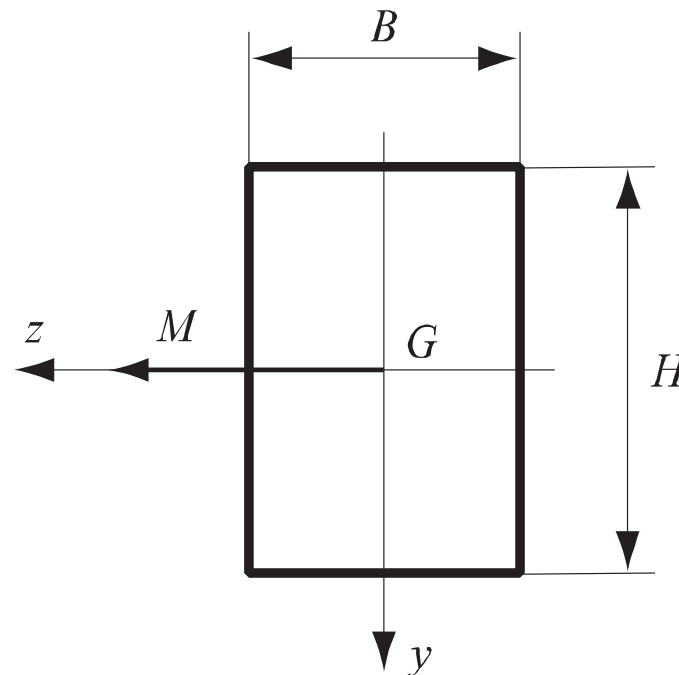


# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.1 et 6.2

Problème 6.1 : Calculer les contraintes maximale et minimale dans la section d'une poutre rectangulaire de hauteur  $H = 6$  cm et de largeur  $B = 4$  cm en acier soumise à un moment de flexion  $M = 5000$  Nm. Déterminer ensuite le rayon de courbure  $r$ .

Problème 6.2 : Calculer les contraintes tangentielles  $\tau$  dans une section rectangulaire de hauteur  $H$  et de largeur  $B$  d'une poutre soumise à la flexion simple.

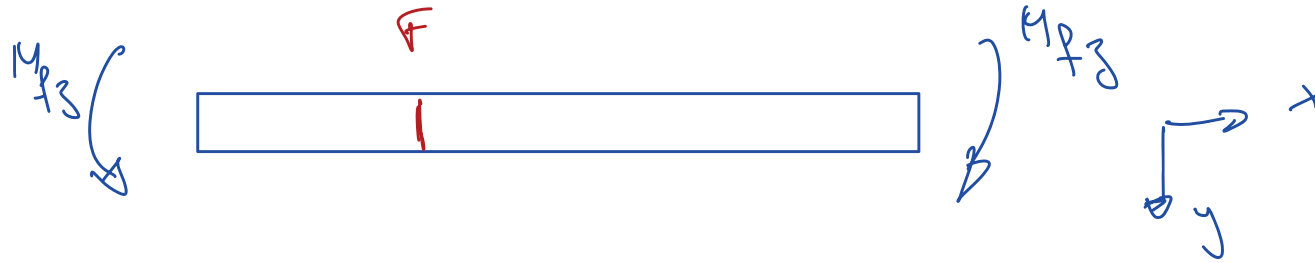




# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.1 et 6.2

1) SCHEMA



2) MOMENT D'INERTIE  $I_z$

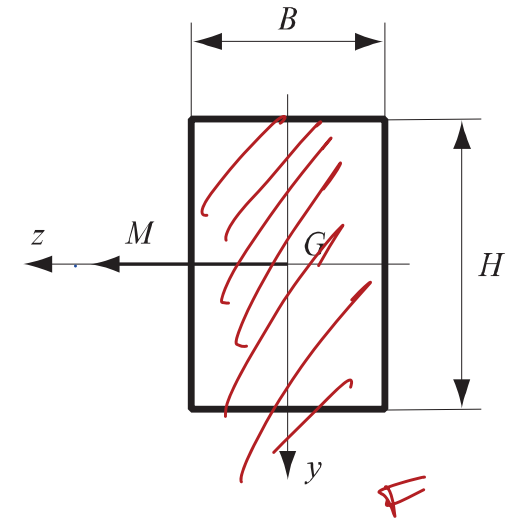
$$I_z = \iint_A y^2 dF = \frac{BH^3}{12} = \underline{\underline{0,72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}}$$

3) CONTRAINTE NORMALE

$$\sigma_{\text{MAX}} = -\sigma_{\text{MIN}} = \frac{H/2 M}{I_z} = \underline{\underline{208 \text{ MPa}}}$$

4) RAYON DE COURBURE

$$r = \frac{EI_z}{M_{Pz}} = \frac{210 \cdot 10^9 \times 0,72 \cdot 10^{-6}}{5000} = \underline{\underline{30,2 \text{ m}}}$$





# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.1 et 6.2

1) HYPOTHESE

• MOMENT FLEXION SIMPLE  $T = \frac{dM}{dx}$

• FORCE T TRANCHE :

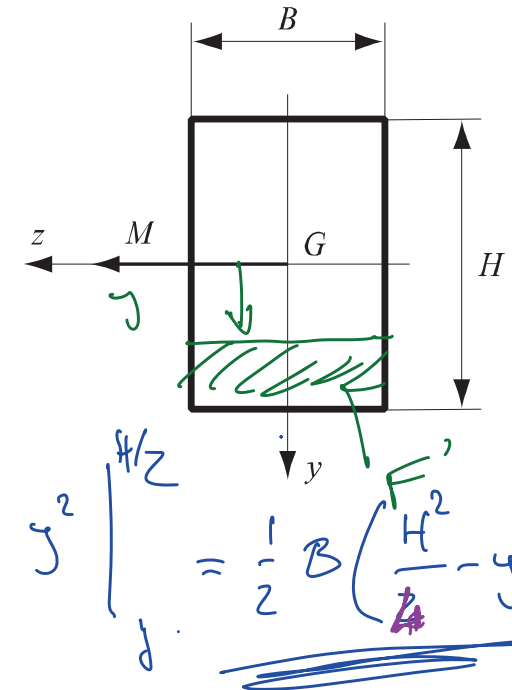
$$\tau = \frac{T S'}{I_b}$$

2) MOMENT STATIQUE SECTION PARTIELLE

$$S' = \iint_{F'} y \, dF = \int_{y=-B/2}^{+B/2} \int_{y=y}^{H/2} y \, dF = \int_{-B/2}^{+B/2} \left. \frac{1}{2} y^2 \right|_{-B/2}^{H/2} dy = \frac{1}{2} B \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$

3) MOMENT INERTIE

$$I_z = \frac{BH^3}{12}$$





# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.1 et 6.2

### 1) HYPOTHESE

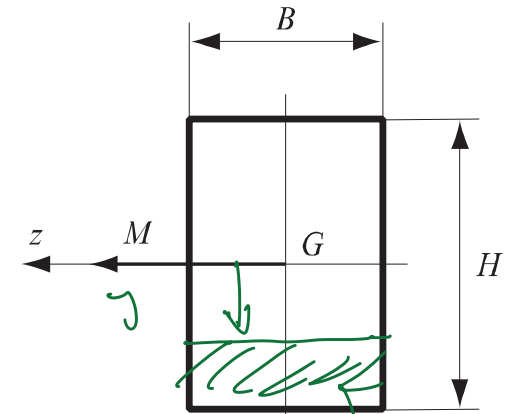
• MOMENT FLEXION SIMPLE  $T = \frac{dM}{dx}$

• FORCE T TRANCHE :

•  $\tau = \frac{T S'}{I_b}$

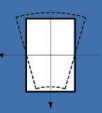
### 2) MOMENT STATIQUE SECTION PARTIELLE

$$S' = \iint_{F'} y \, dF = \int_{y=-B/2}^{+B/2} \int_{y=y}^{H/2} y \, dF = \int_{-B/2}^{+B/2} \left. \frac{1}{2} y^2 \right|_{y=y}^{H/2} dy = \frac{1}{2} B \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$



### 3) MOMENT INERTIE

$$I_z = \frac{BH^3}{12}$$



# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.1 et 6.2

### 4) CONTRAINTE CISAILEMENT

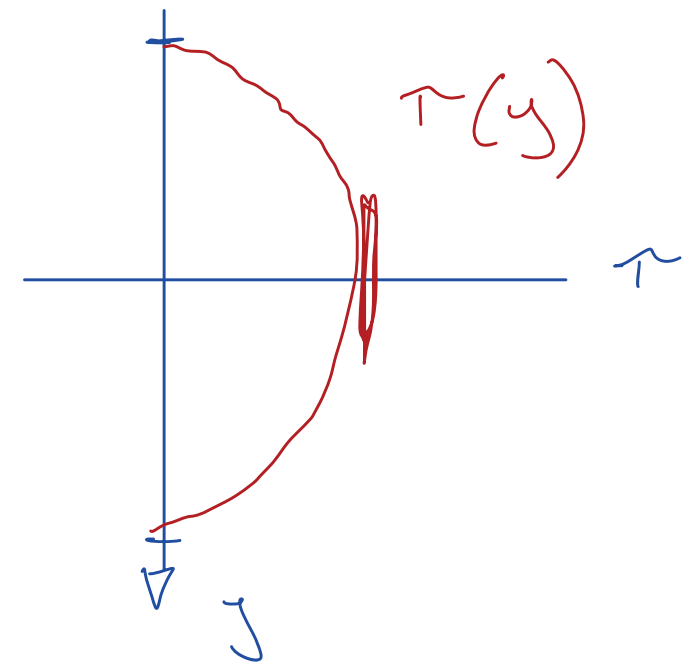
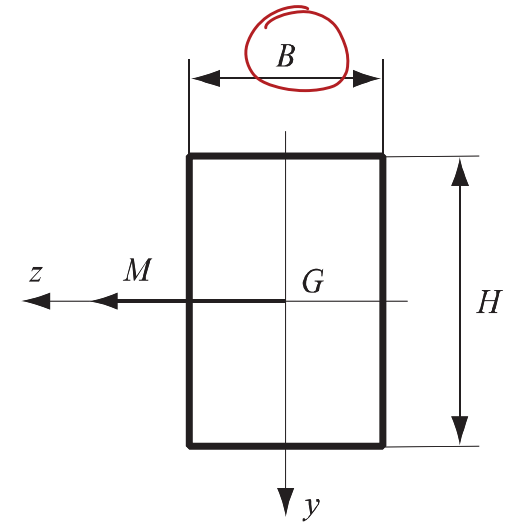
$$\tau = \frac{TS'}{I b}$$

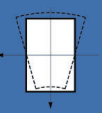
$\downarrow B$

$$= \frac{T}{\frac{BH^3}{12}} \cdot \frac{1}{2} B \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{T}{BH} \left( 1 - \left( \frac{y}{H/2} \right)^2 \right)$$

$$\tau_{MAX} = \tau(y=0) = \frac{3T}{2BH}$$





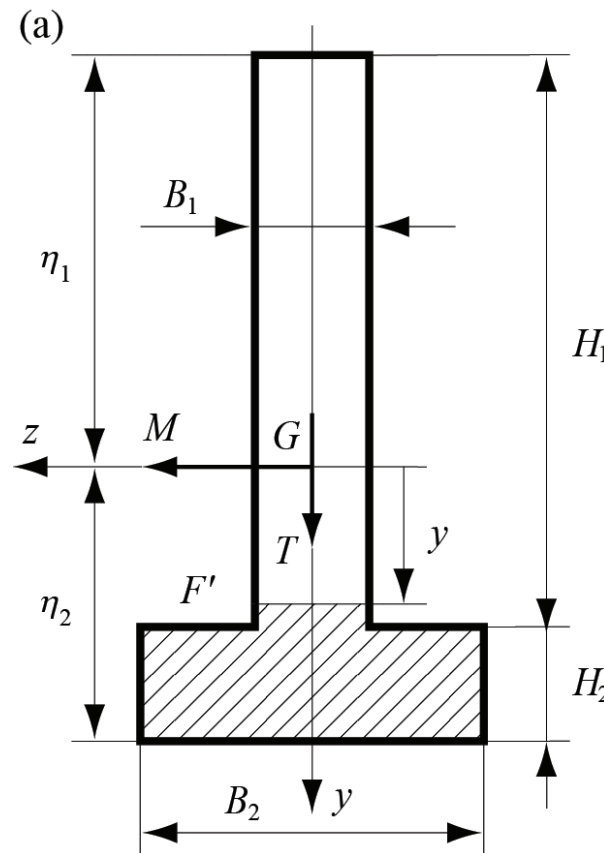
# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.3

Evaluer les contraintes normales  $\sigma$  et tangentielles  $\tau$  dans la section en forme de  $T$  inversé d'une poutre droite soumise à un moment de flexion  $M$  et à un effort tranchant  $T$

$$\sigma(y) = \frac{y M}{I}$$

$$\tau(y) = \frac{T S'}{I b}$$



NOTE





# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

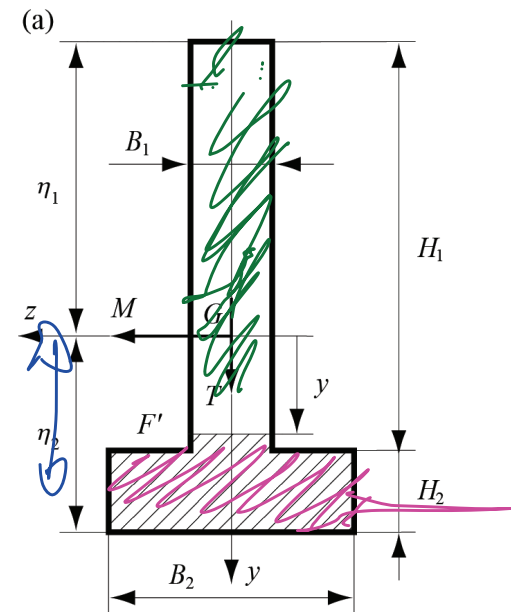
$$\eta_1 = \frac{\frac{1}{2} B_1 H_1^2 + \frac{1}{2} B_2 (H_2^2 + 2 H_1 H_2)}{H_1 B_1 + H_2 B_2}$$

$$\eta_2 = H_1 + H_2 - \eta_1$$

$$I_z = \iint y^2 dF$$

$$= \frac{B_2 H_2^3}{12} + \left( \eta_2 - \frac{H_2}{2} \right)^2 H_2 B_2 + \frac{B_1 H_1^3}{12} + H_1 B_1 \left( \eta_1 - \frac{H_1}{2} \right)^2$$

## Problème 6.3





# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.3

2) CONTRAINTE NORMALE

$$\sigma_{\text{MAX}} = \sigma(y = \eta_2) = \frac{M \eta_2}{I}$$

$$\sigma_{\text{MIN}} = \sigma(y = -\eta_1) = -\frac{M \eta_1}{I}$$

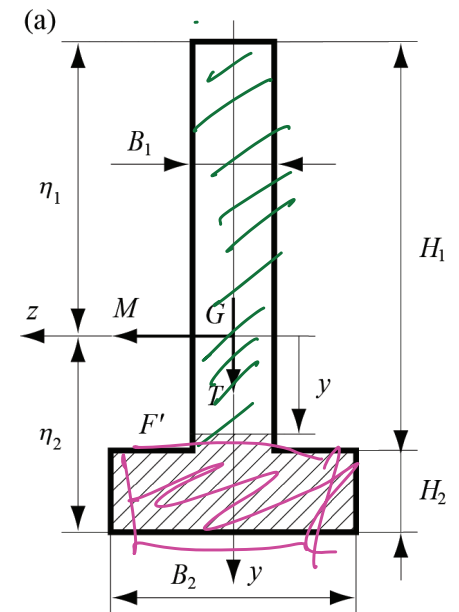
3) MOMENT STATIQUE AIRE PARTIELLE

$$-\eta_1 \leq y \leq \eta_2 - H_2$$

$$S_1' = B_1 \int_{y=y}^{-\eta_1} y \, dy = \frac{B_1}{2} y^2 \Big|_y^{-\eta_1} = \frac{B_1}{2} (\eta_1^2 - y^2)$$

$$\eta_2 - H_2 \leq y \leq \eta_2$$

$$S_2' = B_2 \int_{y=y}^{\eta_2} y \, dy = \frac{B_2}{2} (\eta_2^2 - y^2)$$





# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

4) CONTRAINTE TANGENTIELLE

$$y \left[ -\eta_1 \quad i \quad \eta_2 - H_2 \right]$$

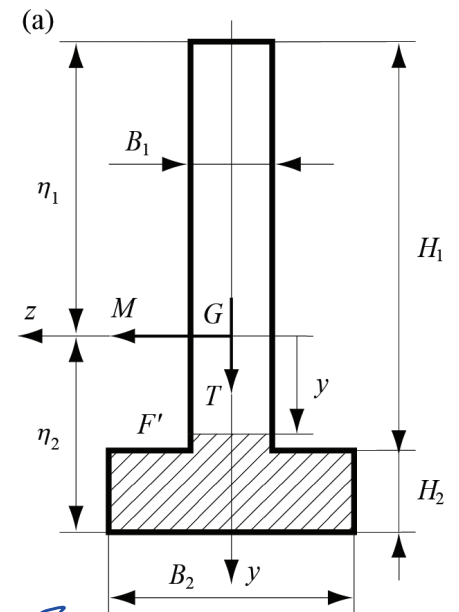
$$\tau_1(y) = \frac{TS_1'}{I B_1} = \frac{T \eta_1^2}{2I} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\eta_1} \right)^2 \right]$$

$$y \left[ -\eta_2 - H_2 \quad i \quad \eta_2 \right]$$

$$\tau_2(y) = \frac{TS_2'}{I B_2} = \frac{T \eta_2^2}{2I} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\eta_2} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{MAX}} (y=0) = \frac{T \eta_1^2}{2I}$$

Problème 6.3



# Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

## Problème 6.3

